Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2010-03-17 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Området givet av olikheterna $0 \leq y \leq \cos x$ och $0 \leq x \leq \pi/2$ roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Beräkna rotationskroppens volym.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - 2y = x^3 \cos x$, $x > 0$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(\pi/2) = 0$.

3. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\arccos(1/n)}}$.

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{-x}$.

5. Beräkna följande gränsvärden:

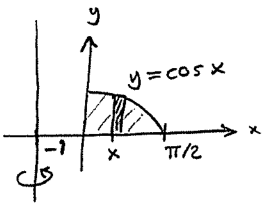
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x \arctan x} \right)$ (1p), (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{1/x}$ (2p).

6. Området givet av olikheterna $0 \leq y \leq e^{-x}$ och $x \geq 0$ roteras ett varv kring linjen $y = ax$, där $a \leq 0$ är en konstant. Bestäm a så att rotationskroppens volym blir så stor som möjligt.

7. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1/n}{n^{1/\sqrt{\ln n}}}$ är konvergent eller divergent.

Lycka till!

Lösningar, TATA42, 2010-03-17

1. 

$dV = /\text{tunt rör}/ = 2\pi(x+1)\cos x\,dx.$

$$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi(x+1)\cos x\,dx =$$

$$= 2\pi\Big[(x+1)\sin x - 1\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi\left(\frac{\pi}{2}+1+0-0-1\right) = \pi^2.$$

<u>Svar:</u> π^2

2. $xy' - 2y = x^3\cos x$, $x > 0$, och $y(\pi/2) = 0$.

$y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x$. $\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx = -2\ln x + C$ så integrerande faktor: $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$. $\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \cos x$, $\left(\frac{1}{x^2}y\right)' = \cos x$, så $\frac{1}{x^2}y = \sin x + C$. $y(\pi/2) = 0$ ger $0 = 1 + C$, så $C = -1$.

<u>Svar:</u> $y(x) = x^2(\sin x - 1)$, $x > 0$.

3. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Klart att serien är alternerande och att termernas belopp $\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$ avtar och går mot 0, så serien är en Leibniz-serie. <u>Svar:</u> Konvergent

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$. $\frac{n+3}{n^3-2} \geq 0$ (om $n \geq 2$) och

$$\frac{\left(\frac{n+3}{n^3-2}\right)}{1/n^2} = \frac{n^3+3n^2}{n^3-2} \longrightarrow 1 \neq 0 \text{ då } n \to \infty, \text{ och}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent. <u>Svar:</u> Konvergent

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\arccos(1/n)}}$. $\arccos\frac{1}{n} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ då $n \to \infty$, så för något N är $\arccos\frac{1}{n} \geq \frac{3}{2}$ då $n \geq N$.

Så $0 \leq \frac{1}{n^{\arccos(1/n)}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ då $n \geq N$, och $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent.

<u>Svar:</u> Konvergent

4. $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{-x}$.

Hom: $r^3 - r^2 - 5r - 3 = 0$, $(r+1)(r^2 - 2r - 3) = 0$, $(r+1)^2(r-3) = 0$,

så $r = -1, -1, 3$ och $y_h = (C_1 x + C_2)e^{-x} + C_3 e^{3x}$

Part: Sätt $y = e^{-x} z$: $(D+1)^2(D-3)(e^{-x} z) = e^{-x}$,

$\cancel{e^{-x}} D^2(D-4) z = \cancel{e^{-x}}$, $z''' - 4z'' = 1$, så $z_p = -\frac{x^2}{8}$.

<u>Svar</u>: $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{-x} + C_3 e^{3x} - \frac{x^2}{8} e^{-x}$

5. a) $$\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x\arctan x} = \frac{\arctan x - \sin x}{x\sin x \arctan x} =$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)}{x\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)\left(x + \mathcal{O}(x^3)\right)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{x^3 + \mathcal{O}(x^5)} =$$

$$= \frac{-1/6 + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x^2)} \longrightarrow -\frac{1}{6}, \quad x \to 0.$$ <u>Svar</u>: $-1/6$

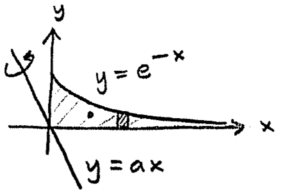
b) $$\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{1/x} = \left(\frac{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) - \cancel{1}}{x}\right)^{1/x} =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)\right)^2\right)\right)} = e^{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^2)\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)} \longrightarrow e^{1/2}, \quad x \to 0.$$ <u>Svar</u>: $\sqrt{e}$

6.

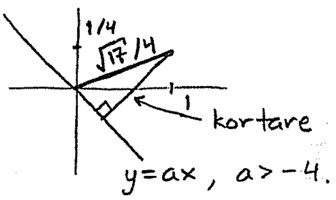


Enligt Guldins regel blir rotationsvolymen som störst då områdets tyngdpunkt har största möjliga avstånd till rotationsaxeln.

$$\text{Area} = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1, \text{ så}$$

$$x_T = \frac{1}{1}\int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,dx = \left[x(-e^{-x}) - 1\cdot e^{-x}\right]_0^\infty = 1, \text{ och}$$

$$y_T = \frac{1}{1}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{2}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{4}.$$



Om $y=ax$ är vinkelrät mot $y=\frac{x}{4}$ (som går mellan $(0,0)$ och (x_T, y_T)) är avståndet $\sqrt{1^2+(1/4)^2} = \sqrt{17}/4$, annars blir avståndet kortare. Så $a = -\frac{1}{1/4} = -4$ ger max volym.

<u>Svar:</u> $a=-4$.

[Alternativt kan man beräkna volymen som funktion av a,

$$V(a) = \int_0^\infty 2\pi\cdot\frac{e^{-x}/2 - ax}{\sqrt{a^2+1}}\cdot e^{-x}\,dx = 2\pi\cdot\frac{1/4 - a}{\sqrt{a^2+1}}, \text{ och sedan}$$

göra ett teckenstudium av $V'(a) = 2\pi\cdot\frac{-1-a/4}{(a^2+1)^{3/2}}$.]

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1/n}{n^{1/\sqrt{\ln n}}}$.   Sätt $f(x) = \dfrac{1/x}{x^{1/\sqrt{\ln x}}}$, $x \geq 2$. $f(x) \geq 0$.

Eftersom $x^{1/\sqrt{\ln x}} = e^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\ln x} = e^{\sqrt{\ln x}}$ är växande är f avtagande, så vi kan använda integralkriteriet.

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \Big/\, t=\sqrt{\ln x},\ x=e^{t^2},\ dx = 2te^{t^2}dt \,\Big/ = \int_{\sqrt{\ln 2}}^\infty \frac{1/e^{t^2}}{(e^{t^2})^{1/t}}\cdot 2te^{t^2}\,dt =$$

$$= \int_{\sqrt{\ln 2}}^\infty 2te^{-t}\,dt = \left[2t(-e^{-t}) - 2e^{-t}\right]_{\sqrt{\ln 2}}^\infty < \infty, \text{ så}$$

$\int_2^\infty f(x)\,dx$ är konvergent.

<u>Svar:</u> Konvergent