Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2010-01-12 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 4y = 1$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.

2. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x^2}$ (1p), (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2e^x \sin x + \ln(1-2x)}{x^3}$ (2p).

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - x = xe^{-y}$ som uppfyller $y(0) = 0$.

4. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n}$.

5. Området givet av $x^2 + y^2 \le 1$ och $x \ge 0$ roteras ett varv kring linjen $x = -1$. Beräkna rotationskroppens volym.

6. Visa att den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^3 \, dx$ är konvergent.

7. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n^2} \frac{n^k}{k!}$.

Lycka till!

Envariabelanalys 2, TATA42, 2010-01-12, lösningsförslag

1. Karaktäristiskt polynom är $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$ och $y_h = (Ax+B)e^{-2x}$.

   Ansättningen $y_p = C$ ger partikulärlösningen $y_p = \dfrac{1}{4}$ och en godtycklig lösning ges således av $y = y_h + y_p = (Ax+B)e^{-2x} + \dfrac{1}{4}$.

   $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$ ger slutligen att $B = -\dfrac{1}{4}$ och $A = \dfrac{1}{2}$.
   Svar: $y = \dfrac{2x-1}{4}e^{-2x} + \dfrac{1}{4}$.

2. (a) $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{x^2} = /\text{ML-utveckling}/ = \dfrac{1 + x + \frac{x^2}{2} + (1 - x + \frac{(-x)^2}{2}) - 2(1 - \frac{x^2}{2}) + O(x^3)}{x^2} =$ $2 + O(x) \to 2$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är 2.

   (b) $\dfrac{2e^x \sin x + \ln(1-2x)}{x^3} = /\text{ML-utveckling}/$
   $= \dfrac{2(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)) + (-2x - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} + O(x^4))}{x^3} =$
   $\dfrac{2(x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2}) - 2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + O(x^4)}{x^3} = -\dfrac{1}{3} + 1 - \dfrac{8}{3} + O(x) \to -2.$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är -2.

3. $y' - x = xe^{-y} \Leftrightarrow \dfrac{y'}{1 + e^{-y}} = x \Leftrightarrow y'\dfrac{e^y}{e^y + 1} = x \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{e^y}{e^y+1}\,dy = \int x\,dx \Leftrightarrow \ln(e^y + 1) =$ $\dfrac{x^2}{2} + C$.

   $y(0) = 0$ ger $C = \ln 2$ och således $e^y + 1 = e^{\frac{x^2}{2} + \ln 2} \Leftrightarrow y = \ln(2e^{\frac{x^2}{2}} - 1)$.

   Alternativ: Variabelbytet $t = e^{-y}$ fungerar bra. Svar: $y = \ln(2e^{\frac{x^2}{2}} - 1)$.

4. (a) Eftersom $\arctan n \to \dfrac{\pi}{2}$ då $n \to \infty$ ger divergenstestet att serien är divergent. Svar: Serien är divergent.

   (b) Positiv serie. Eftersom $\dfrac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n}} = 1 + O(\dfrac{1}{n^2}) \to 1$ då $n \to \infty$ och $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent följer att serien är divergent enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform. Svar: Serien är divergent.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n} = \sum_{t=0}^{\infty} (\frac{\cos(t\pi + \frac{\pi}{3})}{3t+1} + \frac{\cos(t\pi + \frac{2\pi}{3})}{3t+2} + \frac{\cos(t\pi + \pi)}{3t+3}) = \sum_{t=0}^{\infty} (\frac{(-1)^t \cdot \frac{1}{2}}{3t+1} +$ $\dfrac{(-1)^t \cdot (-\frac{1}{2})}{3t+2} + \dfrac{(-1)^t \cdot (-1)}{3t+3})$. Eftersom $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{3t+k}$ är konvergent för varje $k > 0$, enligt Leibniz kriterium, följer att $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{3t+1} - \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{3t+2} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{3t+3} =$ $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} (\frac{(-1)^t \cdot \frac{1}{2}}{3t+1} + \frac{(-1)^t \cdot (-\frac{1}{2})}{3t+2} + \frac{(-1)^t \cdot (-1)}{3t+3})$ och därmed är serien konvergent. Svar: Serien är konvergent.

5. Volymen V då halvcirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0$ roteras ett varv kring $x=-1$ är lika med dubbla volymen då området $y=\sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring $x=-1$. Detta ger $V = 2\cdot 2\pi \displaystyle\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}\ dx$.

$4\pi \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx = 4\pi[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{4\pi}{3}$,

$4\pi \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = /x=\sin t,\ dx=\cos t\ dt,\ \sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t$ då $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}/ =$ $4\pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\ dt = \pi^2 + 2\pi[\frac{\sin 2t}{2}]_0^{\pi/2} = \pi^2$. Hela volymen är således $\dfrac{4\pi}{3}+\pi^2$.

Att $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx = \pi/4$ följer enklare av iakttagelsen att integralen är arean av den del av enhetsskivan som ligger i första kvadranten. Svar: $\dfrac{4\pi}{3}+\pi^2$.

6. Integralen är endast generaliserad i ∞ och därför behöver endast konvergensen hos $\displaystyle\int_1^\infty \cos x^3\ dx$ undersökas.

$\displaystyle\int_1^R \cos x^3\ dx = \int_1^R \frac{1}{3x^2}\cdot 3x^2\cos x^3\ dx = /\mathrm{PI}/ = [\frac{\sin x^3}{3x^2}]_1^R + \frac{2}{3}\int_1^R \frac{\sin x^3}{x^3}\ dx \to$ $\displaystyle -\frac{\sin 1}{3} + \frac{2}{3}\int_1^\infty \frac{\sin x^3}{x^3}\ dx$ då $R\to\infty$. Eftersom $0 \leq |\dfrac{\sin x^3}{x^3}| \leq \dfrac{1}{x^3}$ och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\ dx$ är konvergent så är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x^3}{x^3}\ dx$ absolutkonvergent och därmed konvergent. Detta visar att $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^3\ dx$ är konvergent. Svar: Integralen är konvergent.

7. Enligt Maclaurins formel med restterm i Lagranges form gäller att $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \frac{t^k}{k!} + \frac{e^{\theta t}t^{n^2+1}}{(n^2+1)!}$ där $\theta \in [0,1]$. Med $t=n$ fås således $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \frac{n^k}{k!} = e^n - \frac{e^{\theta n}n^{n^2+1}}{(n^2+1)!}$ och $1 - \dfrac{n^{n^2+1}}{(n^2+1)!} \leq e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}\frac{n^k}{k!} \leq 1$ ty $0 \leq e^{-n}\cdot e^{\theta n} \leq 1$. Om $\dfrac{n^{n^2+1}}{(n^2+1)!} \to 0$ då $n\to\infty$ följer, enligt instängningsregeln, att $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_0^\infty \frac{n^k}{k!} = 1$.

Eftersom $0 \leq \dfrac{n^{n^2+1}}{(n^2+1)!} = \dfrac{n}{n^2+1}\cdot\dfrac{n^{n^2}}{n^2!} < \dfrac{(n^n)^n}{n^2!} = \dfrac{n^n}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\cdot\dfrac{n^n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\dots\cdot 2n}\cdot$ $\dfrac{n^n}{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot\dots\cdot 3n}\cdot\dots\cdot\dfrac{n^n}{(n^2-2n+1)\cdot(n^2-2n+2)\cdot\dots\cdot n^2-n}\cdot$ $\dfrac{n^n}{(n^2-n+1)\cdot(n^2-n+2)\cdot\dots\cdot n^2} < \dfrac{n^n}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}\cdot\dfrac{n^n}{(n^2-2n+1)\cdot(n^2-2n+2)\cdot\dots\cdot n^2-n}\cdot$ $\dfrac{n^n}{(n^2-n+1)\cdot(n^2-n+2)\cdot\dots\cdot n^2} < /n$ så stort att $n^2-2n+1 > \dfrac{n^2}{2}/ < \dfrac{1}{n!}\cdot\dfrac{(n^n)^3}{(\frac{n^2}{2})^{2n}} =$ $\dfrac{4^n}{n!}\cdot\dfrac{n^{3n}}{n^{4n}} \to 0$ då $n\to\infty$ enligt standardgränsvärde, följer av instängningsregeln att $\dfrac{n^{n^2+1}}{(n^2+1)!} \to 0$ då $n\to\infty$. Svar: Gränsvärdet är 1.