Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2009-08-20 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $e^{x^2}y' = 2x(1+y^2)$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 4y' + 5y = 5x^2$.

3. (a) Skriv upp maclaurinutvecklingen av ordning 3 för en allmän funktion f. Resttermen (av grad 4) ska anges på ordoform.
   (b) Härled maclaurinutvecklingen av ordning 3 för funktionen $\tan x$.
   (c) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan\big(\ln(1+x)\big) - 2x + x^2}{x^3}$.

4. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$, roteras ett varv kring y-axeln.

5. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

6. Ange ett rationellt tal som approximerar $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}$ med ett fel som är högst 10^{-2}.

7. Bestäm funktionen f så att kurvan $y = f(x)$, $x \ge 0$, har följande egenskaper: kurvan har en ändpunkt i origo, och kurvans tangent i punkten $(x, f(x))$ har riktningskoefficient lika med kurvans båglängd från origo till punkten $(x, f(x))$.

Lycka till!

Svar m.m., Envariabelanalys 2, TATA42, 2009-08-20

1. $e^{x^2}y' = 2x(1+y^2) \Leftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = 2xe^{-x^2}$(separabel) $\Leftrightarrow \arctan y = C - e^{-x^2}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $C = 1$. Slutligen har vi $\arctan y = 1 - e^{-x^2} \Leftrightarrow y = \tan(1 - e^{-x^2}), \quad x \in \mathbf{R}$, ty $0 \leqslant 1 - e^{-x^2} < 1$ så $|1 - e^{-x^2}| < \dfrac{\pi}{2}$.

   Svar: $y = \tan(1 - e^{-x^2}), \quad x \in \mathbf{R}$

2. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 5$ har nollställena $r = 2 \pm i$ så den homogena lösningen ges av $y_h(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$. Partikulärlösningsansatsen $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ ger $a = 1$, $b = 8/5$ och $c = 22/25$. Allmänna lösningen fås slutligen som $y = y_h + y_p$.

   Svar :$y(x) = e^{2x}(A\cos x + B\sin x) + x^2 + \dfrac{8}{5}x + \dfrac{22}{25}$, där A, B är två godtyckliga konstanter

3. (a) **Svar**: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

   (b) $f(x) = \tan x$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, $f''(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2 x)$, $f'''(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4\tan^2(x)(1 + \tan^2 x)$ ger $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$ och $f'''(0) = 2$. Från (a) fås nu svaret.

   Svar: $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$

   (c) Med $s = \ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ så fås $\tan s = s + \dfrac{1}{3}s^3 + \mathcal{O}(s^4) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4) + \dfrac{1}{3}(x + \mathcal{O}(x^2))^3 + \mathcal{O}((\mathcal{O}(x))^4) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Detta ger $\dfrac{2\tan(\ln(1+x)) - 2x + x^2}{x^3} = \dfrac{4}{3} + \mathcal{O}(x) \to \dfrac{4}{3}$ då $x \to 0$.

   Svar: $\dfrac{4}{3}$

4. Rotationsarean $= \displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx =$ $\displaystyle\int_0^1 2\pi x\sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \pi x(e^x + e^{-x})\,dx = 2\pi\left(1 - e^{-1}\right)$, där en partialintegrering behövs i sista steget.

   Svar: $2\pi\left(1 - e^{-1}\right)$

5. (a) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n}$ saknar gränsvärde då $n \to \infty$ pga standardgränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Då ger divergenstestet att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent.

   Svar: Divergent

   (b) Maclaurin ger $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$ så $0 \leqslant a_n = \sin\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n^6}) = \dfrac{1}{n^2}\left(1 + \mathcal{O}(\dfrac{1}{n^4})\right)$. Med $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ fås $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ så jämförelsesatsen säger att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent eftersom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är det (standard). Alternativt kan man använda olikheten $\sin\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   Svar: Konvergent

(c) $0 \leqslant a_n = \dfrac{n}{4^n} = \dfrac{n}{2^n} \cdot \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n} = b_n$ för alla $n \geqslant N$ för något heltal N ty $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. Eftersom $\sum\limits_{n=N}^{\infty} b_n$ är konvergent (geometrisk serie med kvot $1/2$) så ger jämförelsesatsen att $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ är konvergent. Då blir även $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Svar: Konvergent

6. Notera att $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + r(t)$, där $|r(t)| = \left|\dfrac{\cos\xi}{5!} t^5\right| \leqslant \dfrac{|t|^5}{5!}$ (med ξ mellan 0 och t) enligt Maclaurin. Eftersom $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} r\big(\frac{1}{2^n}\big)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|r\big(\frac{1}{2^n}\big)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{5!} \cdot \dfrac{1}{32^n} = \dfrac{1}{5!} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{32}} = \dfrac{4}{465} < 10^{-2}$ (geometrisk serie) så gäller att $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin\dfrac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{8^n} + r\big(\frac{1}{2^n}\big)\right) =$ /geometriska serier/ $= \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{8}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} r\big(\frac{1}{2^n}\big) = \dfrac{38}{21} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} r\big(\frac{1}{2^n}\big) \approx \dfrac{38}{21}$ med ett fel på högst 10^{-2}.

Svar: $\dfrac{38}{21}$

7. Texten ger att $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt$, $x \geqslant 0$, samt att $f(0) = 0$. Derivering med hjälp av analysens huvudsats ger att integralekvationen är ekvivalent med DE:n $f''(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ tillsammans med villkoret $f'(0) = 0$. Sätt $g = f'$ så fås den separabla DE:n $\dfrac{g'}{\sqrt{1+g^2}} = 1 \Leftrightarrow$ $\ln(g + \sqrt{1+g^2}) = x + C$ (integraluttrycket ger att $g \geqslant 0$). Kravet $f'(0) = g(0) = 0$ ger att $C = 0$. Alltså $\ln(g + \sqrt{1+g^2}) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+g^2} = e^x - g \Leftrightarrow 1 = e^{2x} - 2ge^x$ och $g \leqslant e^x \Leftrightarrow$ $g(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Nu är $g = f'$ så f fås som $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ ty $f(0) = 0$.

Svar: $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$