Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2009–06–11 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 6x - 11$.

2. Beräkna längden av kurvan $y = x^{3/2}$, där $0 \leq x \leq 1$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' \cos x - 2y \sin x = x$, $|x| < \pi/2$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

4. Avgör om funktionen $f(x) = x\sqrt{1+x}\,\ln(1+x) - x^2$ har lokalt maximum eller lokalt minimum i origo.

5. (a) Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$ konvergent? (1p)

   (b) Är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x}\,dx$ konvergent? (2p)

6. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq r \leq 1/(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (polära koordinater), roteras ett varv kring y-axeln.

7. Betrakta Maclaurin-serien
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$
för funktionen $f(x) = \tan x$, det vill säga, $a_n = f^{(n)}(0)$. Visa att $a_n = 0$ då n är jämnt och att $a_n > 0$ då n är udda.

Lycka till!

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2009-06-11

1. *Homogen ekvation:* $y_h'' - 5y_h' + 6y_h = 0$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = 3 \text{ eller } r = 2, \text{ så:}$$

$$y_h = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x} \quad (A, B \text{ konstanter}).$$

Partikuläransats: $y_p = ax + b$ ger $-5a + 6(ax + b) = 6x - 11$ vilket ger $a = 1, b = -1$.

Svar: $y = A\mathrm{e}^{2x} + B\mathrm{e}^{3x} + x - 1$.

2. Längd=

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2} dx =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \left[\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

Svar: $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$

3. Eftersom ekvationen kan skrivas som $y' - 2(\sin x/\cos x)y = y' - 2\tan(x)y = x/\cos x$ och $\ln(\cos^2 x)$ är en primitiv till $\tan x$ så följer det att ekvationen är ekvivalent med

$$(\cos^2(x)y)' = x\cos(x) \Leftrightarrow \cos^2(x)y = \int x\cos(x)dx = x\sin x + \cos x + C.$$

D.v.s.

$$y = \frac{x\sin x + \cos x + C}{\cos^2 x}.$$

$y(0) = 1 + C = 0$ ger $C = -1$.

Svar: $y = \frac{x\sin x + \cos x - 1}{\cos^2 x}$

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{1+x}\ln(1+x) - x^2 = \\ &= x(1 + x/2 - x^2/8 + \mathcal{O}(x^3))(x - x^2/2 + x^3/3 + \mathcal{O}(x^4)) - x^2 = \ldots = \\ &= -x^4/24 + \mathcal{O}(x^5) = x^4(-1/24 + \mathcal{O}(x)). \end{aligned}$$

Eftersom $-1/24 + \mathcal{O}(x)$ är negativt för x nära 0, så har $f(x)$ ett lokalt max i origo.

Svar: $f(x)$ har ett lokalt max i origo.

5a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$ är alternerande och termernas absolutbelopp $\left|\frac{\cos(\pi n)}{n}\right| = \frac{1}{n}$ avtar mot 0 då $n \to \infty$. Alltså konvergerar serien enligt Leibniz kriterium.

Svar: Konvergent

5b.

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\cos(\pi x)}{x} dx = \{P.I.\} =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left(\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right]_1^R + \int_1^R \frac{\sin(\pi x)}{\pi x^2} dx\right).$$

Eftersom $\frac{\sin(\pi R)}{\pi R} \to 0$ då $R \to \infty$ och $|\sin(\pi x)/(\pi x^2)| \leq 1/(\pi x^2)$, som ger att $\int_1^\infty \frac{\sin(\pi x)}{\pi x^2}dx$ är absolutkonvergent ($|\int_1^\infty \sin(\pi x)/(\pi x^2)dx| \leq \int_1^\infty |\sin(\pi x)/(\pi x^2)|dx \leq \int_1^\infty 1/(\pi x^2)dx < \infty$) och därför också konvergent, så följer att hela integralen är konvergent.

Svar: Konvergent

6. Alt 1. $0 \leq r \leq 1/(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ är ekvivalent med att $0 \leq x + y \leq 1$ och $x, y \geq 0$ vilket ger att den sökta volymen ges av:

$$\int_0^1 \pi(1-y)^2 dy = \pi/3.$$

Alt 2. Volymen ges av

$$2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{2r}{3}\cos\varphi \frac{r^2}{2} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}\right)^3 \cos\varphi d\varphi =$$
$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\tan\varphi}\right)^3 \frac{\cos\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1+\tan\varphi}\right)^3 \tan'\varphi d\varphi = \{s := \tan\varphi\} =$$
$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+s}\right)^3 ds = \pi/3$$

Svar: $\pi/3$

7. Eftersom $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ följer det rekursivt att $\tan^{(n)} x = P_n(\tan x)$ där P_n är ett polynom av grad $n+1$. Vidare gäller att dessa polynom uppfyller

$$P_{n+1}(\tan x) = \tan^{(n+1)} x = \frac{d}{dx} P_n(\tan x) = P_n'(\tan x)(1 + \tan^2 x).$$

D.v.s. $P_{n+1}(z) = P_n'(z)(1+z^2)$. Vi har t.ex. $P_0(z) = z, P_1(z) = 1 + z^2, P_2(z) = 2z + 2z^3 \ldots$ Vi får nu rekursivt (egentligen m.h.a. induktion om man ska vara noga ...) att $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n+1} z^{n+1}$ uppfyller att

$$a_0, a_2, \ldots, a_n = 0, \quad a_1, a_3, \ldots, a_{n+1} > 0 \text{ om } n \text{ är jämnt},$$
$$a_0, a_2, \ldots, a_{n+1} > 0, \quad a_1, a_3, \ldots, a_n = 0 \text{ om } n \text{ är udda}.$$

Ty om vi visat att detta gäller för alla $n < k$ och k är udda så följer med $n = k - 1$ ovan att

$$P_k(z) = P_n'(z)(1+z^2) = (a_1 + 3a_3 z^2 + \ldots)(1+z^2) = a_1 + (a_1 + 3a_3)z^2 + \ldots,$$

och k jämnt behandlas på motsvarande sätt, så då följer att påståendet håller även för k. (Notera också att $\tan^{(n)}(0) = P_n(0)$ är just konstanttermen i P_n).

V.S.B.