Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2009–06–01 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Området $1 \leqslant y \leqslant e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ roteras ett varv kring linjen $x = 2$. Vad blir volymen av den uppkomna kroppen?

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - 2y'' + y' = e^x$.

3. Ange alla lösningar till differentialekvationen $(x^2 + x)y' = y^2 + 2y + 1$, $x > 0$.

4. (a) Är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{k^3 + 1}$ konvergent?

   (b) Är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln k}{k}$ konvergent?

   (c) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k\, 3^k}{4^k}$.

5. (a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\ln(\cos x)}$. (2p)

   (b) Låt $f(x) = \ln(1 - x)$. Bestäm $f^{(49)}(0)$. (1p)

6. Är $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}\, e^x}\, dx$ konvergent?

7. Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k + 6}{k^3 + 3k^2 + 2k}$.

Lycka till!

Envariabelanalys 2, TATA42, 2009-06-01, lösningsförslag

1. Volymen är $2\pi \int_0^2 (e^x - 1)(2 - x)\, dx$ =/partiell integration/= $2\pi([(e^x - x)(2 - x)]_0^2 - \int_0^2 (e^x - x)(-1)\, dx) = 2\pi(-2 + [e^x - \frac{x^2}{2}]_0^2) = 2\pi(e^2 - 5)$. Svar: $2\pi(e^2 - 5)$.

2. Karaktäristiskt polynom är $r^3 - 2r^2 + r = r(r-1)^2$ och $y_h = C_1 + (C_2x + C_3)e^x$.
   Sätt $y = ze^x$. Förskjutningsregeln ger att $D(D-1)^2y = e^x \Leftrightarrow (D+1)D^2z = z''' + z'' = 1$.
   Ansättningen $z_p = Ax^2$ ger $A = \frac{1}{2}$ och vi får partikulärlösningen $y_p = e^x z_p = \frac{x^2}{2}e^x$.
   Svar: $y = y_h + y_p = C_1 + (\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3)e^x$.

3. Första ordningens separabel DE.
   $(x^2 + x)y' = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2 \Leftrightarrow /y \neq -1/ \Leftrightarrow \frac{y'}{(y+1)^2} = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow$
   $-\frac{1}{y+1} = \ln x - \ln(x+1) + C = \ln\frac{x}{x+1} + C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\ln\frac{x}{x+1} + C} - 1.$
   Även $y = -1$ är en lösning. Svar: $y = -(\frac{1}{\ln\frac{x}{x+1} + C} + 1)$ och $y = -1$.

4. (a) Eftersom $0 \le \frac{k^2 - 1}{k^3 + 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^3}}$ och $\frac{1 - \frac{1}{k^2}}{1 + \frac{1}{k^3}} \to 1$ då $k \to \infty$, ger jämförelse med den divergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ att även $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{k^3 + 1}$ är divergent. Svar: Divergent.

   (b) Eftersom $0 \le \frac{\ln(k+1) - \ln k}{k} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{k} = / \ln(1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + O(\frac{1}{k^2})/ = \frac{1}{k^2} + O(\frac{1}{k^3}) = \frac{1}{k^2}(1 + O(\frac{1}{k}))$ och $1 + O(\frac{1}{k}) \to 1$ då $k \to \infty$, ger jämförelse med den konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ att även $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln k}{k}$ är konvergent. Svar: Konvergent.

   (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k 3^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{3}{4})^k$ = /geometriska serier/ = $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - (-\frac{3}{4})} = \frac{18}{7}$. Svar: $\frac{18}{7}$.

5. (a) $\frac{x^4}{x^2 + 2\ln\cos x} = /2\ln\cos x = 2\ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)) = 2(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6) - \frac{(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6))^2}{2} + O(x^6)) = -x^2 + 2\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4} + O(x^6) = -x^2 - \frac{x^4}{6} + O(x^6)/ = \frac{x^4}{-\frac{x^4}{6} + O(x^6)} = \frac{1}{-\frac{1}{6} + O(x^2)} \to -6$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är -6.

   (b) $\ln(1+t)$ har MacLaurinutvecklingen $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{49}}{49} + O(t^{50}) = \sum_{k=1}^{49} \frac{(-1)^{k-1}t^k}{k} + O(t^{50})$ och således gäller att $f(x) = \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{49} \frac{x^k}{k} + O(x^{50})$.
   Då koefficienten framför x^{49} är $\frac{f^{(49)}(0)}{49!}$ enligt MacLaurins formel följer att $\frac{f^{(49)}(0)}{49!} = -\frac{1}{49} \Leftrightarrow f^{(49)}(0) = -48!$.
   Svar: $-48!$.

6. Generalisering i 0 och ∞. Positiv funktion.

Fallet 0.

Eftersom $\dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x} = \dfrac{(1+x)(x+O(x^2))}{x^{3/2}e^x} = \dfrac{x}{x^{3/2}} \cdot \dfrac{1+x}{e^x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1+x}{e^x}$ och $\dfrac{1+x}{e^x} \to 1$ då $x \to 0+$, ger jämförelse med den konvergenta integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ att även $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}\,dx$ är konvergent.

Fallet ∞.

$\dfrac{\frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}}{1/x^2} = \dfrac{(1+x)}{x} \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} \cdot \dfrac{x^2}{e^x} = (\dfrac{1}{x}+1) \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x^{1/2}} \cdot \dfrac{x^2}{e^x} \to 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ då $x \to \infty$ enligt hastighetstabell. Således existerar $\omega > 1$ så att $x \geq \omega \Rightarrow \dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x} < \dfrac{1}{x^2}$.

Eftersom $\displaystyle\int_\omega^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent är även $\displaystyle\int_\omega^\infty \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}\,dx$ konvergent enligt jämförelsekriteriet.

Således är $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}\,dx + \int_1^\omega \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}\,dx + \int_\omega^\infty \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^{3/2}e^x}\,dx$ konvergent Svar: Ja.

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+6}{k^3+3k^2+2k} =$ /partialbråksuppdelning: $\dfrac{4k+6}{k^3+3k^2+2k} = \dfrac{3}{k} - \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}/ =$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\frac{3}{k} - \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 3\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) =$ / teleskopsummor $/ = 3(1 - \dfrac{1}{n+1}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}) \to \dfrac{7}{2}$ då $n \to \infty$. Svar: 7/2.