Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA42
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2009–03–17 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift ger högst tre poäng. En uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst två poäng. För betyg 3, 4 respektive 5 krävs dels minst åtta, tolv respektive sexton poäng totalt, dels minst tre, fyra respektive fem godkända uppgifter.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, roterar ett varv kring x-axeln.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + \dfrac{x}{1+x^2}\,y = x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

3. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}\,\ln(1+x^2) - x^2}{x^3}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}} \right)$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.

4. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n\sqrt{n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$.

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - 8y = xe^{2x}$.

6. Approximera integralen $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ med ett rationellt tal så att felet blir mindre än 10^{-3}.

7. Låt funktionen f vara den lösning till differentialekvationen $f'(x) + xf(x) = 1$ som uppfyller $f(0) = 0$. Avgör om serien

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

   är konvergent.

Lycka till!

SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2009-03-17

1.

$$Area = \int_{-1}^{1} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi\int_{-1}^{1}\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx =$$

$$2\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx = 2\pi\left[2\arcsin x - x\right]_{-1}^{1} = 4\pi(\pi-1).$$

Svar: $4\pi(\pi-1)$.

2. Ekvationen

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = x$$

är linjär, och en integrerande faktor är $\exp\left(\int \frac{x}{1+x^2}dx\right) = \sqrt{1+x^2}$. Därför har vi

$$\begin{aligned} y' + \frac{x}{1+x^2}y &= x \Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2}y)' = x\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}y = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C \Leftrightarrow \\ y &= \frac{1}{3}(1+x^2) + C(1+x^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Bivillkoret $y(0) = 1$ ger $\frac{1}{3} + C = 1$, d.v.s. $C = \frac{2}{3}$.

Svar: $y = \frac{1}{3}(1+x^2) + \frac{2}{3}(1+x^2)^{-1/2}$.

3.

3a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}\ln(1+x^2)-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{2}+O(x^2))(x^2+O(x^4))-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+O(x^4)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Svar: $\frac{1}{2}$

3b:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{x}{\sqrt[3]{1+1/x}}\right) = \\ \lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{x}{1+\frac{1}{3x}+O(\frac{1}{x^2})}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{3}+O(\frac{1}{x})-x}{1+\frac{1}{3x}+O(\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{3}$

3c:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1-x^2/2+O(x^4)}-e}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e(1+(-x^2/2+O(x^4))+O(x^4)-1)}{x^2} = -\frac{e}{2}.$$

Svar: $-\frac{e}{2}$

4.

4a: Eftersom $\lim_{n\to\infty} e^{1/n^2} = 1 \neq 0$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$ divergent.

Svar: Divergent

4b: Eftersom $0 \le \frac{1-\cos n}{n\sqrt{n}} \le \frac{2}{n^{3/2}}$ följer det av jämförelsekriteriet att serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n\sqrt{n}}$ är konvergent (eftersom vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}$ är konvergent).

Svar: Konvergent

4c: Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}$ är alternerande, och termernas absolutbelopp $|(-1)^n/\sqrt[5]{n}| = 1/\sqrt[5]{n}$ är avtagande samt går mot 0 då $n \to \infty$, så alltså är serien konvergent enligt Leibniz sats (den är dock ej absolutkonvergent).

Svar: Konvergent

5. $y''' - 8y = x\mathrm{e}^{2x}$.

Homogen ekvation: $r^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ eller $r = -1 \pm i\sqrt{3}$. Därför gäller att den homogena ekvationen $y_h''' - 8y_h = 0$ har den allmänna lösningen

$$y_h = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + C_3\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x).$$

Partikulärlösning: Vi gör ansatsen $y_p = z\mathrm{e}^{2x}$, vilket ger:

$$(D^3 - 8)z\mathrm{e}^{2x} = \{\text{förskjutningsregeln}\} = \mathrm{e}^{2x}((D+2)^3 - 8)z = \mathrm{e}^{2x}(D^3 + 6D^2 + 12D)z = x\mathrm{e}^{2x}.$$

D.v.s. vi vill hitta en funktion z s.a. $z''' + 6z'' + 12z' = x$. För detta ansätts $z' = ax + b$, vilket insatt i ekvationen ger $6a + 12(ax + b) = x$. Denna har lösningen $a = 1/12, b = -1/24$ vilket efter integration ger $z = \frac{1}{24}(x^2 - x)$ (integrationskonstanten skippas då vi bara vill ha en lösning).

Svar: $y = y_h + y_p = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + C_3\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{24}(x^2 - x)\mathrm{e}^{2x}$.

6.

$$\int_0^2 \frac{1 - \cos x}{x^2}dx = \int_0^2 \frac{1 - (1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + \cos(\xi)x^8/8!)}{x^2}dx =$$
$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!}\right)dx + \int_0^2 \frac{\cos(\xi)x^6}{8!}dx,$$

där $0 \le \xi \le x$ (ξ beror på x). Vi börjar med att uppskatta den sista integralen som är vårt "fel":

$$\left|\int_0^2 \frac{\cos(\xi)x^6}{8!}dx\right| \le \int_0^2 \left|\frac{\cos(\xi)x^6}{8!}\right| dx \le \int_0^2 \frac{x^6}{8!}dx = \frac{2^7}{7 \cdot 8!} \le 10^{-3}.$$

Värdet av den första integralen är

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!}\right)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \frac{x^5}{5 \cdot 6!}\right]_0^2 = \frac{202}{225}.$$

Svar: $\frac{202}{225}$

7.

$$f'(x) + xf(x) = 1 \Rightarrow f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f'''(x) + xf''(x) + 2f'(x) = 0$$
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow f^{(n)}(x) + xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

Sätter vi in $x = 0$ i detta får vi

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)f^{(n-2)}(0) = -(n-1)(-(n-3))f^{(n-4)} = \ldots$$

Om vi nu utnyttjar att $f(0) = 0$ vilket ger $f'(0) = 1$ så får vi successivt fram att

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = ((-2n)(2-2n)(4-2n) \cdot \ldots \cdot ((2n-2) - 2n)f'(0) = (-1)^n 2^n n!$$

Därför gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}$$

Att denna är konvergent (t.o.m. absolutkonvergent) kan man t.ex. se genom uppskattningen ($n \ge 3$)

$$\frac{2^n n!}{(2n+1)!} \le \frac{2^n n!}{(n!)^2} = \frac{2^n}{n!} = 8 \cdot \frac{2^{n-3}}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!} \le \frac{8}{(n-1)^2}$$

(eftersom vi vet att $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8}{(n-1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{n^2}$ är konvergent).