Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42/TEN1

2009–01–12 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' + 3y'' - 4y = e^x$.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y' = (x^2-1)(y+1), x > 0$, som uppfyller $y(1) = 0$.

3. Beräkna

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x - 2x}{x^2}$ (1p) (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{x - \sqrt{2x-1}}$ (2p)

4. Området som definieras av $0 \leqslant y \leqslant \ln x, 1 \leqslant x \leqslant e$ roteras ett varv kring linjen $x = 1$. Beräkna rotationskroppens volym.

5. Beräkna längden av kurvan $r = 2 + 2\cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. (Polära koordinater.)

6. (a) Antag att $a_k > 0$ och att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar. Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ divergerar. (1p)

   (b) Antag att $0 \leq a_k \leq \pi$ och att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergerar. Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} \sin a_k$ konvergerar. (1p)

   (c) Sätt $b_k = a_k - a_{k+1}$. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar om och endast om följden $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergerar. (1p)

7. Approximera π med ett rationellt tal så att felet blir mindre än 10^{-2} med hjälp av Maclaurin-utveckling.

Envariabelanalys 2, TATA42, 2009-01-12, lösningsförslag

1. Karaktäristiskt polynom är $r^3+3r^2-4=(r+2)^2(r-1)$ och $y_h=(Ax+B)e^{-2x}+Ce^x$. Sätt $y=ze^x$. Förskjutningsregeln ger att $(D+2)(D-1)y=e^x \Leftrightarrow (D+3)^2Dz = z'''+6z''+9z'=1$ och vi får partikulärlösningen $y_p=\dfrac{x}{9}e^x$. Svar: $y=y_h+y_p=(Ax+B)e^{-2x}+(C+\dfrac{x}{9})e^x$.

2. $x^2y'=(x^2-1)(y+1) \Leftrightarrow /y\neq -1/ \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=1-\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \ln|y+1|=x+\dfrac{1}{x}+C$. $y(1)=0$ ger att $\ln(y+1)=x+\dfrac{1}{x}-2 \Leftrightarrow y=e^{x+\frac{1}{x}-2}-1$. Svar: $y=e^{x+\frac{1}{x}-2}-1$.

3. (a) $\dfrac{e^{2x}-\cos x-2x}{x^2}=/\text{ML-utveckling}/=\dfrac{1+2x+2x^2-(1-\frac{x^2}{2})-2x+O(x^3)}{x^2}=\dfrac{5}{2}+O(x)\to 5/2$ då $x\to 0$. Svar: Gränsvärdet är 5/2.

   (b) $\dfrac{x-1-\ln x}{x-\sqrt{2x-1}}=\dfrac{(x-1-\ln x)(x+\sqrt{2x-1})}{x^2-2x+1}=/t=x-1,\ t\to 0 \text{ då } x\to 1/=\dfrac{(t-\ln(1+t))(1+t+\sqrt{1+2t})}{t^2}=/\text{ ML-utveckling}/$
   $=\dfrac{(t-(t-\frac{t^2}{2}+O(t^3)))(1+t+\sqrt{1+2t})}{t^2}=(\dfrac{1}{2}+O(t))(1+t+\sqrt{1+2t})\to 1$ då $t\to 0$, dvs då $x\to 1$. Svar: Gränsvärdet är 1.

4. Volymen är $2\pi\displaystyle\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = /\text{PI}/ = 2\pi([(\frac{x^2}{2}-x)\ln x]_1^e-\int_1^e(\frac{x}{2}-1)\,dx) = 2\pi(\frac{e^2}{2}-e-[\frac{x^2}{4}-x]_1^e)=\frac{\pi}{2}(e^2-3)$. Svar: $\dfrac{\pi}{2}(e^2-3)$.

5. Bågelementet är $ds=\sqrt{(r(\phi))^2+(r'(\phi))^2}d\phi=\sqrt{(2+2\cos\phi)^2+(-2\sin\phi)^2}d\phi=\sqrt{8(1+\cos\phi)}d\phi=\sqrt{16\cos^2\frac{\phi}{2}}d\phi=4|\cos\frac{\phi}{2}|d\phi$ och kurvlängden är $4\displaystyle\int_0^\pi|\cos\frac{\phi}{2}|\ d\phi = 4\int_0^\pi \cos\frac{\phi}{2}\ d\phi=8[\sin\frac{\phi}{2}]_0^\pi=8$. Svar: Längden är 8.

6. (a) $\sum a_k$ konvergent och $a_k>0 \Rightarrow /\text{ divergenstestet}/ \Rightarrow a_k\to 0+$ då $k\to\infty \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_k}\to\infty$ då $k\to\infty \Rightarrow /\text{ divergenstestet }/\Rightarrow \sum\dfrac{1}{a_k}$ är divergent.

   (b) Eftersom $0\le\sin a_k\le a_k$ då $0\le a_k\le\pi$ följer av jämförelsekriteriet att $\sum\sin a_k$ är konvergent.

   (c) Enligt definitionen av konvergens för en oändlig serie följer att $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$ är konvergent precis då talföljden $\{s_n\}_1^\infty$ av partialsummorna $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n b_k=\sum_{k=1}^n(a_k-a_{k+1})=$ /teleskopsumma/ $=a_1-a_{n+1}$ är konvergent, vilket är ekvivalent med att följden $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ är konvergent.

7. $\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = /(1+t)^{-1/2} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{3t^2}{8} - \dfrac{5t^3}{16(1+\theta t)^{7/2}}/ =$
$\displaystyle\int_0^{1/2} (1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3x^4}{8}+\dfrac{5x^6}{16(1-\theta x^2)^{7/2}})\,dx \Rightarrow |\dfrac{\pi}{6}-(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6\cdot 2^3}+\dfrac{3}{8\cdot 5\cdot 2^5}| = |\int_0^{1/2} \dfrac{5x^6}{16(1-\theta x^2)^{7/2}}\,dx| =$
$\displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{5x^6}{16(1-\theta x^2)^{7/2}}\,dx \le \dfrac{5}{16\cdot(3/4)^{7/2}} \int_0^{1/2} x^6\,dx = \dfrac{5}{16\cdot 3^{7/2}\cdot 7} < \dfrac{1}{600} \Leftrightarrow$
$|\pi - \dfrac{4\cdot 5\cdot 32\cdot 3+8\cdot 5\cdot 2+9}{8\cdot 5\cdot 16}| < \dfrac{1}{100}.$ Svar: Exempelvis $\dfrac{2009}{640}(\approx 3,139)$.