Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

# Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

**2008–08–16 kl 8.00–13.00**

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' - y = -\frac{x}{x+1}$, $x > 0$, som uppfyller $y(1) = \ln 2$.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' + 4y' = 2$.

3. Beräkna längden av kurvan $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2\ln x\right)$, $1 \leq x \leq e^2$.

4. Bestäm ett $a$ sådant att
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x\sin x} + \frac{a}{x^2}\right)$$
existerar och beräkna gränsvärdet för detta $a$.

5. (a) Beräkna $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n}$. (1p)

   (b) Betrakta serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\ln(n+1) - \ln n)$. Är serien absolutkonvergent? Är den konvergent? (2p)

6. Approximera $\sqrt[3]{67}$ med ett rationellt tal så att felet blir mindre än $10^{-3}$.

7. Beräkna
$$\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{1}{\arctan t}\,dt.$$

**Lycka till!**

# Envariabelanalys 2, TATA42, 2008-08-16, lösningsförslag

1. $xy' - y = -\dfrac{x}{x+1} \Leftrightarrow y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{x+1}$ har integrerande faktor $1/x$ och kan skrivas $(\dfrac{y}{x})' = -\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow /x > 0/ \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \ln(x+1) - \ln x + C \Leftrightarrow y = x(\ln\dfrac{x+1}{x} + C)$. $y(1) = \ln 2$ ger $C = 0$ Svar: $y = x\ln\dfrac{x+1}{x}$.

2. Karaktäristiskt polynom är $r^3 + 4r = r(r+2i)(r-2i)$ och $y_h = A + B\sin 2x + C\cos 2x$. Ansättningen $y_p = ax$ ger $y_p = x/2$. Svar: $y = y_h + y_p = A + B\sin 2x + C\cos 2x + x/2$.

3. $y' = \dfrac{1}{4}(2x - \dfrac{2}{x})$ och $1 + (y')^2 = 1 + \dfrac{1}{4}(x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2) = \dfrac{1}{4}(x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2) = (\dfrac{x + \frac{1}{x}}{2})^2$. Således är längden $= \displaystyle\int_1^{e^2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_1^{e^2} (\frac{x + \frac{1}{x}}{2})\, dx = \frac{1}{4}[x^2 + 2\ln x]_1^{e^2} = \frac{e^4 + 3}{4}$.
Svar: $\dfrac{e^4+3}{4}$.

4. $\dfrac{\cos x}{x \sin x} + \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{x\cos x + a\sin x}{x^2 \sin x} = /\text{ML-utveckling}/ = \dfrac{x(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)) + a(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))}{x^2(x + O(x^3))} = \dfrac{x(1+a) - x^3(\frac{1}{2} + \frac{a}{6}) + O(x^6))}{x^3(1 + O(x^2))} = /a = -1 \text{ nödvändigt}/ = \dfrac{-1/3 + O(x^2))}{1 + O(x^2)} \to -1/3$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är $-1/3$ om $a = -1$.

5. (a) Geometrisk serie. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{3})^n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = 3/4$. Svar: $3/4$.

   (b) Eftersom $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}(\ln(n+1) - \ln n) = /\text{teleskopsumma}/ = \ln(k+1) \to \infty$ då $k \to \infty$ är serien inte absolutkonvergent.
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\ln(n+1) - \ln n) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ är en Leibnizserie ty den är alternerande och $\ln(1 + \dfrac{1}{n})$ avtar mot 0. Serien är därmed konvergent. Svar: Konvergent men ej absolutkonvergent.

6. Notera först att $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9(1+\xi)^{5/3}}$ för något $\xi$ mellan 0 och $x$ enligt ML:s formel.
$(67)^{1/3} = (2^6 + 3)^{1/3} = 2^2(1 + \dfrac{3}{2^6})^{1/3} = 2^2(1 + \dfrac{1}{2^6} - \dfrac{1}{2^{12}(1+\xi)^{5/3}})$. Det följer att $|(67)^{1/3} - (2^2 + \dfrac{1}{2^4})| = \dfrac{1}{2^{10}\cdot(1+\xi)^{5/3}} \leq \dfrac{1}{2^{10}} < \dfrac{1}{1000}$. Ett närmevärde, med fel $< \dfrac{1}{1000}$, är således $2^2 + \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{65}{16}$. Svar: Exempelvis $\dfrac{65}{16}$.

7. $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\arctan t}\ dt = \int_x^{2x} (\frac{1}{\arctan t} - \frac{1}{t})\ dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt = \int_x^{2x} \frac{t - \arctan t}{t \arctan t}\ dt + [\ln t]_x^{2x} =$
$\displaystyle /\mathrm{ML}/ = \int_x^{2x} \frac{O(t^3)}{t^2 + O(t^4)}\ dt + \ln 2 = \int_x^{2x} O(t)\ dt + \ln 2 = O(x^2) + \ln 2 \to \ln 2$ då $x \to 0$.

Alternativt ger integralkalkylens generaliserade medelvärdessats att $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\arctan t}\ dt =$
$\displaystyle\int_x^{2x} (\frac{t}{\arctan t} \cdot \frac{1}{t})\ dt = \frac{\xi}{\arctan \xi} \int_x^{2x} \frac{1}{t}\ dt = \frac{\xi}{\arctan \xi} \ln 2 \to \ln 2$ då $x \to 0$.
Svar: $\ln 2$.