Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

2008–06–04 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\ \ln(1-x)}{1-\cos 3x}, \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to\infty} (x\sqrt[3]{x^3+x} - x^2).$$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $yy' = (1+y^2)x$, $x \in \mathbf{R}$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 8x^2$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 3$.

4. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, roterar ett varv kring linjen $y = 1$.

5. Visa att serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$
är konvergent för varje x sådant att $-1 < x \leqslant 1$.

6. För vilka $\lambda \in \mathbf{R}$ finns lösningar y till differentialekvationen $y'' - \lambda y = 0$ som inte är identiskt lika med noll och som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(\pi/2) = 0$?

7. Bestäm en konstant C sådan att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}} \leqslant C.$

Lycka till!

Svar m.m. Envariabelanalys 2, TATA42, 2008–06–04

1. (a) $\dfrac{e^x - 1 - \sin x}{x^2} = \dfrac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^3\right) - 1 - \left(x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2} + \mathcal{O}\left(x\right) \to \dfrac{1}{2},\ x \to 0\,.$

   Svar: $\dfrac{1}{2}$

   (b) $\dfrac{\sin x \cdot \ln(1-x)}{1 - \cos 3x} = \dfrac{\left(x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)\left(-x + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)}{1 - \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^4\right)\right)} = \dfrac{-1 + \mathcal{O}\left(x\right)}{\frac{9}{2} + \mathcal{O}\left(x^2\right)} \to -\dfrac{2}{9},\ x \to 0\,.$

   Svar: $-\dfrac{2}{9}$

   (c) $x\left(x^3 + x\right)^{1/3} - x^2 = x^2\left(\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{1/3} - 1\right) = x^2\left(1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) - 1\right) =$
   $\dfrac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \to \dfrac{1}{3},\ x \to \infty\,.$

   Svar: $\dfrac{1}{3}$

2. Ekvationen är separabel. $\dfrac{2y}{y^2+1}y' = 2x \Rightarrow \ln(y^2+1) = x^2 + C \Rightarrow y^2 + 1 = e^{x^2}e^C\,.$ $y(0) = 1$ ger $e^C = 2$ vilket ger $y = \pm\sqrt{2e^{x^2} - 1}$ och eftersom $y(0) = 1$ får vi $y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}\,.$

   Svar: $y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}\,.$

3. $y_h = (Ax+B)e^{2x}$. Ansatsen $y = ax^2+bx+c$ ger $y_p = 2x^2+4x+3$. Den allmänna lösningen är $y = (Ax+B)e^{2x}+2x^2+4x+3$ och $y' = Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}+4x+4$. $2 = y(0) = B+3,\ B = -1\,.$ $3 = y'(0) = A + 2B + 4,\ A = 1\,.$

   Svar: $y = (x-1)e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3\,.$

4. $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ och $dA = 2\pi\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ger arean $2\pi\displaystyle\int_0^1\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)dx = 2\pi\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right).$

   Svar: $\pi(\pi - 2)\,.$

5. $|x| < 1 : |a_n| = \left|(-1)^n\dfrac{x^n}{n}\right| \le |x|^n,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ konvergerar $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergerar $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergerar.

   $x = 1 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Serien är alternerande, termernas belopp bildar en avtagande följd som går mot noll. Serien konvergerar enligt Leibniz' kriterium.

6. Tre fall. a) $\lambda > 0: y = Ae^{\sqrt{\lambda}\,x} + Be^{-\sqrt{\lambda}\,x}$.
$0 = y(0) = A + B,\ 0 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A = B = 0$.
b) $\lambda = 0:\ y = Ax + B$. $y(0) = 0$ ger $B = 0$. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ger $A = 0$.
c) $\lambda < 0:\ y = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + \sin\sqrt{-\lambda}\,x$.
$y(0) = 0$ ger $A = 0$. Ekvationen har nollskilda lösningar om $B \neq 0$. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ger $B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\,\frac{\pi}{2} = 0$ vilket ger $\sqrt{-\lambda} = 2n + 1$ där n är ett heltal sådant att $n \geq 0$.

Svar: $\lambda = -(2n+1)^2$, där n är ett heltal sådant att $n \geq 0$.

7. Sätt $a_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$ för $n = 1, 2, \ldots$. Eftersom funktionen $x \mapsto \sqrt{x}$ är växande gäller $a_n \geq \int_0^n \sqrt{x}\,dx = \frac{2n^{3/2}}{3}$, alltså $0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{3n^{-3/2}}{2}$. Eftersom funktionen $x \mapsto x^{-3/2}$ är avtagande gäller $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} + \int_1^{\infty} \frac{3x^{-3/2}}{2}\,dx = 1 + 3 = 4$, så $C = 4$ är ett möjligt val.