Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

2008–05–27 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = xe^{-x}$.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $2xy' + y = \frac{1}{x+1}$, $x > 0$ som uppfyller $y(1) = 0$.

3. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\ln(1-x)}{x \sin x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{1 - \cos x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\arctan \frac{1}{x}}$

4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $\frac{1}{x+1} \le y \le 1$, $0 \le x \le 1$ roteras ett varv kring linjen $y = 1$.

5. Avgör konvergens:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ (1p) (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x} + \ln(1+x)}\, dx$ (2p)

6. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $r = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ (polära koordinater) roterar ett varv kring linjen $y = x$.

7. Antag att f är en deriverbar funktion som uppfyller $f(x) \ge 0$ och $f'(x) \le 0$ då $x \ge 0$. Visa att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \iff \int_0^{\infty} f(x) \sin x \, dx \text{ konvergerar}$$

Lycka till!

Envariabelanalys 2, TATA42, 2008-05-27, lösningsförslag

1. Karaktäristiskt polynom är $r^2 - 2r - 3 = (r+1)(r-3)$ och $y_h = Ae^{-x} + Be^{3x}$.
   Sätt $y = ze^{-x}$. Förskjutningsregeln ger att $(D+1)(D-3)y = xe^{-x} \Leftrightarrow D(D-4)z = z'' - 4z' = x$. Ansättningen $z = x(Cx + D)$ ger partikulärlösningen $y_p = -\dfrac{1}{16}(2x^2 + x)e^{-x}$.
   Svar: $y = y_h + y_p = (A - \dfrac{1}{16}(2x^2 + x))e^{-x} + Be^{3x}$.

2. $2xy' + y = \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2x(x+1)}$ har integrerande faktor $\sqrt{x}$ och kan skrivas $(y\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \Leftrightarrow y\sqrt{x} = \displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}\,dx = /t = \sqrt{x}/ = \int \frac{dt}{t^2+1} =$ $\arctan t + C = \arctan\sqrt{x} + C \Leftrightarrow y = \dfrac{\arctan\sqrt{x} + C}{\sqrt{x}}$. $y(1) = 0$ ger $C = -\dfrac{\pi}{4}$.
   Svar: $y = \dfrac{\arctan\sqrt{x} - \pi/4}{\sqrt{x}}$.

3. (a) $\dfrac{\sin 2x + 2\ln(1-x)}{x\sin x} = /\text{ML-utveckling}/ = \dfrac{2x + O(x^3) + 2(-x - x^2/2 + O(x^3))}{x(x + O(x^3))} =$ $\dfrac{-1 + O(x)}{1 + O(x^2)} \to -1$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är -1.

   (b) $\dfrac{e^{\sin x} - 1 - x}{1 - \cos x} = /e^{\sin x} = e^{x + O(x^3)} = 1 + (x + O(x^3)) + \dfrac{(x + O(x^3))^2}{2} + O(x^3) =$ $1 + x + x^2/2 + O(x^3), 1 - \cos x = x^2/2 + O(x^4)/ = \dfrac{x^2/2 + O(x^3)}{x^2/2 + O(x^4)} \to 1$ då $x \to 0$.
   Svar: Gränsvärdet är 1.

   (c) $\dfrac{\sqrt{x^2-1} - x}{\arctan\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{(\sqrt{x^2-1} + x)\arctan\frac{1}{x}} = /\arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} + O(\dfrac{1}{x^3})/ =$ $-\dfrac{1}{x(\sqrt{1 - 1/x^2} + 1)\frac{1}{x}(1 + O(\frac{1}{x^2}))} = -\dfrac{1}{(\sqrt{1 - 1/x^2} + 1)(1 + O(\frac{1}{x^2}))} \to -1/2$ då $x \to \infty$. Svar: Gränsvärdet är $-1/2$.

4. Tvärsnittsarean är $A(x) = \pi(1 - \dfrac{1}{x+1})^2$ och volymen är, enligt skivformeln,
   $\pi\displaystyle\int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1})^2\,dx = \pi[x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}]_0^1 = \pi(\frac{3}{2} - 2\ln 2)$. Svar: $\dfrac{\pi}{2}(3 - \ln 16)$.

5. (a) Positiv serie. $\dfrac{n}{n^2+3}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{1 + 3/n^2}\cdot(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + O(\dfrac{1}{n^{3/2}})) = \dfrac{1}{n^{3/2}}\cdot\dfrac{1 + O(\frac{1}{n})}{1 + 3/n^2}$
   Eftersom $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent och $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1 + O(\frac{1}{n})}{1 + 3/n^2} = 1$ följer av jämförelsekriteriet (gränsvärdesvarianten) att serien är konvergent. Svar: Konvergent.

(b) Generaliserad i 0 och ∞. Positiv funktion.

Först fallet $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\ln(1+x)}\,dx$. Eftersom $\displaystyle\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\ln(1+x)} = \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+O(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+O(\sqrt{x})}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent och $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+O(\sqrt{x})} = \frac{\pi}{2}$ följer av j-kriteriet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\ln(1+x)}\,dx$ är konvergent.

Fallet $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\ln(1+x)}\,dx$. $\displaystyle\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\ln(1+x)} = \frac{\frac{1}{x}+O(\frac{1}{x^3})}{\sqrt{x}+\ln(1+x)} = \frac{1}{x^{3/2}}\cdot\frac{1+O(\frac{1}{x^2})}{1+\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}}$.

Eftersom $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ är konvergent och $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1+O(\frac{1}{x^2})}{1+\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}} = 1$ följer av j-kriteriet att även $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\ln(1+x)}\,dx$ är konvergent. Svar: Konvergent.

6. Punkten $\sin\phi(\cos\phi,\sin\phi)$ roterad ett varv kring $y = x$ ger en cirkel med omkrets $2\pi\sin\phi\sin(\frac{\pi}{4}-\phi)$. Areaelementet är $2\pi\sin\phi\sin(\frac{\pi}{4}-\phi)\sqrt{(\cos\phi)^2+(\sin\phi)^2}\,d\phi$ och hela arean $\displaystyle 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\phi\sin(\frac{\pi}{4}-\phi)\,d\phi = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}\sin\phi(\cos\phi-\sin\phi)\,d\phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/4}(\sin 2\phi+\cos 2\phi-1)\,d\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}[-\cos 2\phi+\sin 2\phi-2\phi]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2-\frac{\pi}{2})$. Svar: $\displaystyle\frac{\pi(4-\pi)}{4\sqrt{2}}$.

7. Sätt, för varje heltal $n \geq 0$, $\displaystyle a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\sin x\,dx = (-1)^n\int_0^\pi f(n\pi+t)\sin t\,dt$.

Eftersom f är positiv och avtagande gäller att $\displaystyle|a_n|-|a_{n+1}| = \int_0^\pi (f(n\pi+t)-f((n+1)\pi+t))\sin t\,dt \geq 0$. Således följer att $|a_0| \geq |a_1| \geq |a_2| \ldots$.

Om $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gäller att $\displaystyle|a_n| \leq \int_0^\pi f(n\pi+t)\,dt \leq f(n\pi)\cdot\pi \to 0$ då $n\to\infty$. Enligt Leibniz är serien konvergent och därmed även $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\sin x\,dx$ ty $\displaystyle\int_0^X f(x)\sin x\,dx = \sum_0^N a_n + \int_{(N+1)\pi}^X f(x)\sin x\,dx$.

Antag att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ej gäller. Då existerar ω och $C > 0$ sådana att $x > \omega \Rightarrow f(x) > C$ ty f är positiv och avtagande. För $n\pi > \omega$ följer att $\displaystyle|a_n| \geq \int_0^\pi C\sin t\,dt = 2C$ och divergenstestet visar att serien $\displaystyle\sum_0^\infty a_n$ är divergent och därmed att $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\sin x\,dx$ är divergent.