Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

# Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

**2008–03–15 kl 14.00–19.00**

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området givet av $0 \leqslant y \leqslant \ln x$ och $1 \leqslant x \leqslant e$ roterar ett varv kring linjen $x = e$.

2. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \cos x}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y' + 13y = 4\sin 3x$.

4. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\big(e^{1/n} - 1\big)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

5. Beräkna längden av kurvan $y = \ln\big(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\big)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6. Differentialekvationen $x^3 y' = y^2 + 1$, där $x > 0$, har precis en lösning vars definitionsmängd är ett intervall av formen $]a, \infty[$ och som är sådan att $y(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och $y(x) \to -\infty$ då $x \to a+$. Bestäm denna lösning och bestäm $a$.

7. Låt $f$ vara en deriverbar funktion sådan att $f(0) = 1$ och sådan att $f'(x) \leqslant f(x)$ då $x \geqslant 0$. Visa att $f(x) \leqslant e^x$ då $x \geqslant 0$.

**Lycka till!**

**Svar m.m. Envariabelanalys 2, TATA42, 2008-03-15**

1. Den sökta volymen$= 2\pi \int_1^e (e-x)\ln x\,dx = 2\pi \left( \left[ -\frac{(e-x)^2}{2} \ln x \right]_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{e^2-2ex+x^2}{x}\,dx \right) =$
$\pi \left( e^2 \left[ \ln x \right]_1^e - 2e(e-1) + \frac{1}{2}\left(e^2-1\right) \right) = \frac{\pi}{2}\left(4e-e^2-1\right).$

   **Svar**: $\frac{\pi}{2}\left(4e-e^2-1\right)$

2. (a) $\frac{\left(1+x^2\right)^{1/3}-\cos x}{x^2} = \frac{1+\frac{x^2}{3}+\mathcal{O}\left(x^4\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}\left(x^4\right)\right)}{x^2} = \frac{5}{6} + \mathcal{O}\left(x^2\right) \to \frac{5}{6},$ $x \to 0$.

   **Svar:** $\frac{5}{6}$

   (b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)} = \frac{\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}\left(x^3\right)}{x^2+\mathcal{O}\left(x^3\right)} = \frac{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x)} \to \frac{1}{2},\ x \to 0.$

   **Svar**: $\frac{1}{2}$

   (c) $\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}\left(x^4\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}+\mathcal{O}\left(x^4\right)\right)\right) =$
   $\exp\left(-\frac{1}{6}+\mathcal{O}\left(x^2\right)\right) \to \exp\left(-\frac{1}{6}\right),\ x \to 0.$

   **Svar**: $e^{-\frac{1}{6}}$

3. Differentialekvationen kan skrivas $(D-(-2+3i))(D-(-2-3i))y = 4\sin 3x$.
$y_h = e^{-2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.
För att bestämma en partikulärlösning betrakta $(D+2-3i))(D+2+3i))u = 4e^{i3x}$ och sätt $u = ze^{i3x}$. Detta ger $(D+2-3i)(D+2+3i)\left(ze^{i3x}\right) = e^{i3x}(D+3i+2-3i))(D+3i+2+3i))z = 4e^{i3x}$ och vi får ekvationen $\left(D^2+(4+6i)D+4+12i\right)z = 4$. $z_p = \frac{4}{4+12i} = \frac{1}{10}(1-3i)$,
$u_p = \frac{1}{10}(1-3i)e^{i3x}$ och $y_p = \operatorname{Im}\frac{1}{10}(1-3i)(\cos 3x + i\sin 3x) = \frac{1}{10}\sin 3x - \frac{3}{10}\cos 3x$.

   **Svar**: $y = y_h + y_p = e^{-2x}(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x) + \frac{1}{10}\sin 3x - \frac{3}{10}\cos 3x$.

4. (a) Serien är alternerande, termernas belopp bildar en avtagande följd och termerna går mot noll. Serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

   (b) $n\left(e^{1/n}-1\right) \to 1 \neq 0,\ n \to \infty$. Serien är divergent enligt divergenstestet.

   (c) Välj $N$ så stort att $n^2 \leq e^{\frac{n}{2}},\ n \geq N$. $\frac{n^2}{e^n} = \frac{n^2}{e^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{e^{\frac{n}{2}}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n,\ n \geq N$ och $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ konvergerar (geometrisk serie med $|\text{kvot}| < 1$) vilket medför att $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ konvergerar.

5. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\right)^2}\,dx =$
$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4(x^2+x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,dx =$
$\displaystyle\left[\sqrt{x^2+x}\right]_0^1 = \sqrt{2}\,.$

**Svar**: $\sqrt{2}$

6. Ekvationen är separabel. $\displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x^3}\,dx \Rightarrow \arctan y = C - \frac{1}{2x^2}\,.$ $y(x) \to \infty,\ x \to \infty \Rightarrow$
$\displaystyle C = \frac{\pi}{2}\,.$ $\displaystyle y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2x^2}\right).$
$y(x) \to -\infty,\ x \to a+,\ a > 0$ och $y$:s definitionsmängd är $]a,\infty[$ $\displaystyle\Rightarrow -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2a^2} \Rightarrow$
$\displaystyle a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$

**Svar**: $\displaystyle y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)$ och $\displaystyle a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

7. Sätt $g(x) = e^{-x}f(x)$. $g'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) \le 0$ då $x \ge 0$. $g$ är avtagande då $x \ge 0$ och $g(0) = 1 \Rightarrow g(x) \le 1$ då $x \ge 0 \Rightarrow f(x) \le e^x$ då $x \ge 0$. Klart!