Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

2008–01–09 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Området $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\, e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ roteras ett varv kring x-axeln. Vad blir volymen av den uppkomna kroppen?

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' + y'' - y' - y = 4e^x$.

3. Undersök

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^2 \sin x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+2) - \ln x)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x} - e^{x-2} - 1}{x-2}$

4. Bestäm huruvida de givna serierna är konvergenta:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\big(\sqrt{k^2+1} - k\big)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\big(1 - \cos\frac{1}{k}\big)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin\big(k\pi + \frac{\pi}{k}\big)$

5. Bestäm ett rationellt närmevärde till $\ln\dfrac{11}{10}$ med ett fel vars absolutbelopp är högst 10^{-4}.

6. Området $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $1 \leqslant x \leqslant a$ roteras ett varv kring y-axeln. Den uppkomna kroppen har volymen $f(a) - 2$ för $a \geqslant 1$. Bestäm funktionen f.

7. Antag att $y(x)$ är kontinuerligt deriverbar för alla x och att $y'(x) + y(x) = \mathcal{O}\big(\frac{1}{x^2}\big)$ då $x \to \infty$. Visa att $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

Lycka till!

Envariabelanalys 2, TATA42, 2008-01-09, lösningsförslag

1. Volymen är $\pi \int_0^1 xe^{2x}\,dx$ =[partiell integration]= $\pi([x\frac{e^{2x}}{2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,dx) = \pi(\frac{e^2}{2} - (\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4})) = \pi\frac{e^2+1}{4}$. Svar: $\pi\frac{e^2+1}{4}$.

2. Tredje ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

   Karaktäristiska polynomet är $p(r) = r^3+r^2-r-1 = (r^2-1)(r+1) = (r-1)(r+1)^2$ och den homogena lösningen är således $y_H = (C_1x + C_2)e^{-x} + C_3e^x$.

   Förskjutningsregeln ger att $y'''+y''-y'-y = (D+1)^2(D-1)y = 4e^x \Leftrightarrow /y = ze^x/ \Leftrightarrow (D+2)^2Dz = z'''+4z''+4z' = 4$. Ansatsen $z_p = Ax$ visar att $z_p = x$ är en lösning och således är $y_p = xe^x$ en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen. Svar: $y = (C_1x+C_2)e^{-x}+(C_3+x)e^x$.

3. (a) $\frac{\arctan x - \sin x}{x^2 \sin x} = /\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5),\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)/ = \frac{x - \frac{x^3}{3} - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))}{x^2(x+O(x^3))} = \frac{-x^3/6 + O(x^5)}{x^3+O(x^5)} = \frac{-1/6+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to -1/6$ då $x \to 0$. Svar: Gränsvärdet är $-1/6$.

   (b) $x(\ln(x+2) - \ln x) = x\ln(1+\frac{2}{x}) = /t = \frac{2}{x} \to 0+$ då $x \to \infty/ = 2\frac{\ln(1+t)}{t} \to 2$ då $t \to 0$ enligt standardgränsvärde eller enkel Maclaurinutveckling.. Svar: Gränsvärdet är 2.

   (c) $\frac{\sqrt{2x} - e^{x-2} - 1}{x-2} = /t = x-2 \to 0$ då $x \to 2,\ x = 2+t/ = \frac{\sqrt{4+2t} - e^t - 1}{t} = \frac{4+2t-(e^t+1)^2}{t(\sqrt{4+2t}+e^t+1)} = /e^t = 1+t+O(t^2)/ = \frac{-2t+O(t^2)}{t(\sqrt{4+2t}+e^t+1)} = \frac{-2+O(t)}{\sqrt{4+2t}+e^t+1} \to -\frac{1}{2}$ då $t \to 0$. Svar: Gränsvärdet är $-1/2$.

4. (a) Termerna är positiva och, för $k > 0$, gäller att $\sqrt{k^2+1} - k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1+1/k^2}}$. Med $b_k = \frac{1}{k}$ fås att $\frac{a_k}{b_k} \to 1/2$ så jämförelsesatsen visar att serien är divergent ty $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ är divergent. Svar: Serien är divergent.

   (b) Termerna är positiva och då $1-\cos\frac{1}{k} = 1-(1-\frac{1}{2k^2}+O(1/k^4)) = \frac{1}{2k^2} + O(1/k^4)$ följer enligt jämförelssatsen att serien är konvergent. Svar: Serien är konvergent.

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi+\frac{\pi}{k}) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\sin\frac{\pi}{k}$ är en alternerande serie. Vidare gäller att $\sin\frac{\pi}{k}$ avtar mot 0 då $k \to \infty$, ty $k \geq 2$. Leibniz' kriterium visar således att serien är konvergent. Svar: Serien är konvergent.

5. Enligt Maclaurins formel med resttermen på Lagranges form gäller att $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(1+\xi)^4}$ för något ξ mellan 0 och x. Med $x = 1/10$ fås att $|\ln\frac{11}{10} - (\frac{1}{10} - \frac{1}{2\cdot 10^2} + \frac{1}{3\cdot 10^3})| = |\frac{1}{4\cdot 10^4(1+\xi)^4}| \leq$ $/\xi \geq 0/ \leq |\frac{1}{4\cdot 10^4}| < 10^{-4}$. Således är $\frac{1}{10} - \frac{1}{2\cdot 10^2} + \frac{1}{3\cdot 10^3} = \frac{143}{1500}$ ett närmevärde med fel mindre än 10^{-4}. Svar: Exempelvis $\frac{143}{1500}$.

6. Rotationsvolymen är $2\pi\int_1^a xf(x)\,dx$ vilket ger integralekvationen $2\pi\int_1^a xf(x)\,dx =$ $f(a)-2$ som är ekvivalent med differentialekvationen $f'(a) = 2\pi a f(a),\ f(1)-2 = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(a)}{f(a)} = 2\pi a,\ f(1) = 2 \Leftrightarrow /f(a) \geq 0/ \Leftrightarrow \ln f(a) =$ $\pi a^2 + C,\ f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln f(a) = \pi a^2 + \ln 2 - \pi \Leftrightarrow f(a) = 2e^{\pi(a^2-1)}$. Svar: $f(x) = 2e^{\pi(x^2-1)}$.

7. Sätt $h(t) = y'(t) + y(t)$. Integrerande faktor är e^t och $y'(t) + y(t) =$ $h(t) \Leftrightarrow D(y(t)e^t) = h(t)e^t \Leftrightarrow y(x)e^x - y(a)e^a = \int_a^x e^t h(t)\,dt \Leftrightarrow y(x) =$ $y(a)e^{a-x} + e^{-x}\int_a^x e^t h(t)\,dt$ där $a \geq 1$ väljs så stor att det finns en konstant $C > 0$ sådan att $|h(t)| < \frac{C}{t^2}$ för $t \geq a$.

   Då gäller att $|e^{-x}\int_a^x e^t h(t)\,dt| \leq e^{-x}\int_a^x e^t|h(t)|\,dt < Ce^{-x}\int_a^x \frac{e^t}{t^2}\,dt =$ $Ce^{-x}(\int_a^{x/2}\frac{e^t}{t^2}\,dt + \int_{x/2}^x \frac{e^t}{t^2}\,dt) < Ce^{-x}(\frac{e^{x/2}}{a^2}(\frac{x}{2} - a) + \frac{e^x}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{x}{2}) =$ $C(e^{-x/2}\frac{x-2a}{2a^2} + \frac{2}{x}) \to 0$ då $x \to \infty$ enligt standardgränsvärde. Eftersom dessutom $y(a)e^{a-x} \to 0$ då $x \to \infty$ följer att $y(x) \to 0$ då $x \to \infty$.