Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

2007–08–23 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + \dfrac{1}{x}\,y = e^{x^2}$, $x > 0$, som uppfyller $y(1) = e$.

2. Betrakta det plana område som definieras av olikheterna $0 \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$, $1 \leq x \leq 2$. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området roteras ett varv kring x-axeln.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 5\cos x$.

4. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - k\arctan\frac{1}{k}}$ är konvergent eller divergent.

5. (a) Låt funktionen f vara fyra gånger kontinuerligt deriverbar. Ange Maclaurinutvecklingen av ordning tre till f med resttermen i ordoform. (1p)

   (b) Avgör om $f(x) = \sqrt{1+2x^2}\,\sin x - \arctan x$ har lokalt maximum eller minimum i origo. (2p)

6. Kurvan $\rho^2 = \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, (polära koordinater) roterar ett varv kring x-axeln. Beräkna den av rotationsytan inneslutna volymen.

7. Låt x_k vara den positiva roten till ekvationen $x^4 + 2k^2x = 2$ där k är ett positivt heltal. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ är konvergent.

Lycka till!

Svar m.m. Envariabelanalys 2, TATA42, 2007-08-23

1. Integrerande faktor $e^{\ln x} = x$. Ekvationen kan skrivas $\frac{d}{dx}(x\,y) = xe^{x^2} \Leftrightarrow x\,y = \frac{e^{x^2}}{2} + C \Leftrightarrow$ $y = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{C}{x}$. Begynnelsevillkoret ger $C = \frac{e}{2}$.
   Svar: $y = \frac{e^{x^2}+e}{2x}$.

2. $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$. Den sökta volymen $= \pi \int_1^2 f(x)^2\,dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$ $\pi\left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^2 = \pi\,(2\ln 2 - \ln 3)$.

3. $y_h = (Ax+B)e^{2x}$. Betrakta $u'' - 4u' + 4u = 5e^{ix}$. $u = e^{ix}z$ och förskjutningsregeln ger $z'' + 2(-2+i)z' + (3-4i)z = 5$, $z_p = \frac{5}{3-4i} = \frac{3+4i}{5}$. $u_p = \frac{3+4i}{5}e^{ix}$ ger $y_p = \operatorname{Re} u_p =$ $\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x$.
   Svar: $y = y_h + y_p = (Ax+B)e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x$.

4. $a_k = \sqrt{1 - k\arctan\frac{1}{k}} = \sqrt{1 - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{3k^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^5}\right)\right)} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}$.
   $\frac{a_k}{1/k} \to \sqrt{\frac{1}{3}}$, $k \to \infty$ och $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ är divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent.

5. (a) $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right)$.
   (b) $f(x) = \left(1 + x^2 + \mathcal{O}\left(x^4\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right) = x - \frac{x^3}{6} + x^3 +$ $\mathcal{O}\left(x^5\right) - x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right) = x^3\left(\frac{7}{6} + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)$. Detta ger $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ för negativa x nära 0 och $f(x) > 0$ för positiva x nära 0 vilket betyder att 0 är en terrasspunkt för f.
   Svar: f har varken lokalt maximum eller lokalt minimum i origo.

6. Volymselementet=tyngdpunktens väg $\times$ roterad area$= 2\pi\,\frac{2}{3}\,\rho\,\sin\varphi \cdot \frac{1}{2}\,\rho\,\rho\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi$.
   Sökt volym $= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{2}{5}(\cos\varphi)^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}$.
   Svar: $\frac{4\pi}{15}$.

7. Sätt $f(x) = x^4 + 2k^2x - 2$, $x \geq 0$. $f'(x) = 4x^3 + 2k^2 > 0$ om $x \geq 0$ vilket betyder att f är strängt växande. $f(0) = -2 < 0$, $f\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k^8} > 0$. Detta ger att den givna ekvationen har exakt en positiv rot x_k och att denna rot uppfyller $0 < x_k < \frac{1}{k^2}$. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ är konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ är konvergent.
   Svar: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ är konvergent.