Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

2007–06–12 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' - 6y' + 5y = 10x - 7$.

2. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x^2}$, (1p) (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e^{1/x}\sqrt{x^4+x^2} - x^2 - x\right)$. (2p)

3. Bestäm den lösning till $x^2y' = (1-y)^2$ som uppfyller $y(1) = 0$ och ange denna lösnings definitionsmängd.

4. Beräkna arean av den yta som uppstår då kurvan $y = (e^x + e^{-x})/2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, roteras ett varv kring x-axeln.

5. Lös differentialekvationen $y'' + xy' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, till exempel genom en potensserieansats.

6. Låt D vara den del av första kvadranten i xy-planet som ligger innanför ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Bestäm a och b så att D:s tyngdpunkt får koordinaterna $(2, 1)$.

7. Avgör om den lösning till differentialekvationen $e^x y'' - x^2 y = 0$ som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ har lokalt extremvärde för $x = 0$.

Lycka till!

Lösningar, TATA42, 2007-06-12

1. $y'' - 6y' + 5y = 10x - 7$

<u>y_h</u> Kar.ekv. $r^2 - 6r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = 1, 5$, så $y_h = Ae^x + Be^{5x}$.

<u>y_p</u> Ansätt $y_p = ax + b$: $0 - 6a + 5(ax+b) = 10x - 7$ ger $a = 2, b = 1$, så $y_p = 2x + 1$. <u>Svar:</u> $y = Ae^x + Be^{5x} + 2x + 1$.

2. a) $$\frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x^2} = \frac{1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4) - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)}{x^2} = \frac{3x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^2} \to 3, \quad x \to 0$$

b) $$e^{1/x}\sqrt{x^4 + x^2} - x^2 - x = x^2 e^{1/x}\sqrt{1 + 1/x^2} - x^2 - x$$
$$= x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) - x^2 - x$$
$$= x^2 + x + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} - x^2 - x = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \to 1, \quad x \to \infty$$

<u>Svar:</u> a) 3 b) 1.

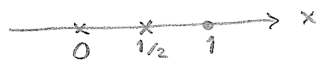
3. $x^2 y' = (1-y)^2$, $y(1) = 0$.

$x \neq 0$, $y \neq 1$ ger $\frac{y'}{(1-y)^2} = \frac{1}{x^2}$, så $\frac{1}{1-y} = -\frac{1}{x} + C$.

$y(1) = 0$ ger $\frac{1}{1-0} = -\frac{1}{1} + C$, så $C = 2$, så $\frac{1}{1-y} = \frac{-1+2x}{x}$

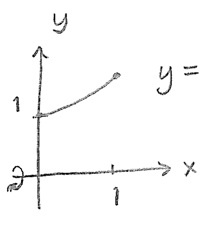
$x \neq \frac{1}{2}$ ger $1 - y = \frac{x}{2x-1}$, $y = 1 - \frac{x}{2x-1} = \frac{x-1}{2x-1}$.

Lösningen är definierad för $x > \frac{1}{2}$, eftersom det är det intervall där begynnelsevärdet antas.



<u>Svar:</u> $y = \frac{x-1}{2x-1}$, $x > \frac{1}{2}$.

4.



$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad dA = 2\pi y\, ds$, $ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$,

så $$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx$$
$$= \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$$

Så $$A = \int_0^1 2\pi \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\, dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2}\right)$$

<u>Svar:</u> $\frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$

5. $y'' + xy' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ansätt $y = \sum_0^\infty a_n x^n$. Så $y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1}$ och

$$y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_0^\infty (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n .$$

Så $\sum_0^\infty \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n - 2a_n\right) x^n = 0$, vilket ger

att $a_{n+2} = \frac{2-n}{(n+2)(n+1)} a_n$, $n \geq 0$. (*)

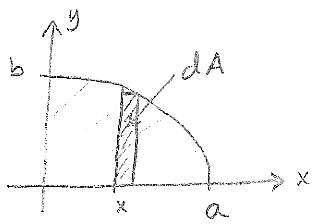
$y'(0) = 0$ ger $a_1 = 0$, så (*) ger $a_n = 0$ för udda n.

$y(0) = 1$ ger $a_0 = 1$, så (*) ger för $n = 0$ att $a_2 = \frac{2-0}{2 \cdot 1} \cdot 1 = 1$.

För $n = 2$ ger (*) att $a_4 = 0$ och alltså är $a_n = 0$ om $n \geq 4$ är jämn.

Alltså: $y = 1 + x^2$. Konvergensundersökning behövs inte eftersom y är ett polynom. Svar: $y = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

6.



$x_T = \frac{1}{A} \int x \, dA$. $A = \frac{\pi ab}{4}$ (en fjärdedels ellips)

$dA = y\,dx = b\sqrt{1 - x^2/a^2}\, dx$, så

$$x_T = \frac{4}{\pi ab} \int_0^a x b \sqrt{1 - x^2/a^2}\, dx = \frac{4}{\pi a}\left[-\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}\right]_0^a = \frac{4a}{3\pi} .$$

Så $x_T = 2$ ger $a = 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$. Symmetri ger $y_T = \frac{4b}{3\pi}$,

så $y_T = 1$ ger $b = \frac{3\pi}{4}$. Svar: $a = \frac{3\pi}{2}$, $b = \frac{3\pi}{4}$.

7. $e^x y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$x = 0$ ger $e^0 y''(0) - 0^2 y(0) = 0$, dvs $y''(0) = 0$.

Derivering ger $e^x y''' + e^x y'' - x^2 y' - 2xy = 0$. Sätt in $x = 0$ så fås $y'''(0) = 0$. Derivering igen:

$e^x y'''' + 2e^x y''' + e^x y'' - x^2 y'' - 4xy' - 2y = 0$. $x = 0$ ger $y''''(0) = 2$.

Så $y(x) = 1 + \frac{2}{4!} x^4 + \mathcal{O}(x^5) = 1 + x^4\left(\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x)\right)$

$\geq 1 = y(0)$ då x är litet, eftersom

$\frac{1}{12} + \mathcal{O}(x) > 0$ då x är litet.

Svar: Lösningen har (strängt) lokalt minimum.