Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

# Tentamen i Envariabelanalys 2 (TATA42)

**2007–05–31 kl 8–13**

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg $n$ räcker $4(n-1)$ poäng och $n$ godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$).

1. Området som ges av $0 \leq y \leq \cos x$ , $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ roteras ett varv kring linjen $x = \dfrac{\pi}{2}$. Beräkna volymen av rotationskroppen.

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'''(x) + 3y''(x) - 4y(x) = (3x-1)e^x$.

3. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\ln(1-x)}{x^2}$ (1p)

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\, e^x - 1 - 2x}{x \arctan x}$. (2p)

4. (a) Är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \ln k}{k^2+8}$ konvergent? (1p)

   (b) Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k}\, x^k$. (1p)

   (c) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$. (1p)

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y'(x) + 2\sqrt{y(x)} = 0$ som uppfyller villkoren $y > 0$ och $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

6. Låt $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \displaystyle\int_0^x 2t \arctan t \, dt$, $x \neq 0$. För vilket/vilka värden på heltalet $n$ går det att definiera $f(0)$ så att $f$ blir kontinuerlig i $x = 0$? Vad ska i så fall $f(0)$ vara för detta/dessa $n$?

7. Bestäm, med hjälp av potensserier, en lösning till differentialekvationen

$$(x^2 + x^4)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = 2$$

och ange denna lösning på enklast möjliga form.

# Envariabelanalys 2, TATA42, 2007-05-31, lösningsförslag

1. Volymen är $2\pi\int_0^{\pi/2}(\frac{\pi}{2}-x)\cos x\,dx =$ /partiell integration/ $= 2\pi([(\frac{\pi}{2}-x)\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-1)\sin x\,dx) = 2\pi[-\cos x]_0^{\pi/2} = 2\pi$. Svar: Volymen är $2\pi$.

2. Tredje ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

   Karaktäristiska polynomet är $p(r) = r^3+3r^2-4 = (r+2)^2(r-1)$ och den homogena lösningen är således $y_H = (C_1x+C_2)e^{-2x}+C_3e^x$.

   Förskjutningsregeln ger att $y'''+3y''-4y = (D+2)^2(D-1)y = (3x-1)e^x \Leftrightarrow /y = ze^x/ \Leftrightarrow (D+3)^2Dz = z'''+6z''+9z' = 3x-1$. Ansatsen $z_p = x(Ax+B) = Ax^2+Bx$ ger $z_p' = 2Ax+B, z_p'' = 2A$ och $z_p''' = 0$ som insatt i ekvationen ger att $12A+18Ax+9B = 3x-1 \Leftrightarrow A = 1/6$ och $B = -1/3$. Således är $y_p = \dfrac{x^2-2x}{6}e^x$ en partikulärlösning. Svar: $y = (C_1x+C_2)e^{-2x}+(C_3+\dfrac{x^2-2x}{6})e^x$.

3. (a) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.
   $\dfrac{\sin 2x+2\ln(1-x)}{x^2} = /\sin 2x = 2x+O(x^3), \ln(1-x) = -x-x^2/2+O(x^3)/ = \dfrac{2x+2(-x-x^2/2)+O(x^3)}{x^2} = -1+O(x) \to -1$ då $x\to 0$. Svar: Gränsvärdet är $-1$.

   (b) Gränsvärde av typ $\frac{0}{0}$.
   $\dfrac{e^x\sqrt{1+2x}-1-2x}{x\arctan x} = /\arctan x = x+O(x^3), (1+2x)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}2x-\frac{1}{8}(2x)^2+O(x^3) = 1+x-\frac{x^2}{2}+O(x^3), e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)/ = \dfrac{(1+x-\frac{x^2}{2}+O(x^3))(1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3))-1-2x}{x(x+O(x^3))} = \dfrac{x^2+O(x^3)}{x^2+O(x^4)} = \dfrac{1+O(x)}{1+O(x^2)} \to 1$ då $x\to 0$. Svar: Gränsvärdet är 1.

4. (a) Termerna är positiva och $\dfrac{k+\ln k}{k^2+8} = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1+\frac{\ln k}{k}}{1+8/k^2}$. Således gäller $\dfrac{\frac{k+\ln k}{k^2+8}}{1/k} = \dfrac{1+\frac{\ln k}{k}}{1+8/k^2} \to 1$ då $k\to\infty$. Eftersom $\sum_1^\infty \frac{1}{k}$ är divergent är även $\sum_1^\infty \dfrac{k+\ln k}{k^2+8}$ divergent enligt jämförelsekriteriet. Svar: Serien är divergent.

   (b) Eftersom $\left|\dfrac{\frac{5^{k+1}}{k+1}x^{k+1}}{\frac{5^k}{k}x^k}\right| = \dfrac{5k}{k+1}|x| = \dfrac{5}{1+1/k}|x| \to 5|x|$ då $k\to\infty$, ger kvotkriteriet att potensserien är absolutkonvergent då $5|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1/5$ och divergent då $|x| > 1/5$. Konvergensradien är således $1/5$. Svar: Konvergensradien är $1/5$.

   (c) $\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\dfrac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty\dfrac{(-2)^k}{k!} = e^{-2}$. Svar: Summan är $e^{-2}$.

5. Differentialekvationen är separabel. För $y>0$ gäller att $(1+x^2)y'+2\sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y'}{2\sqrt{y}} = -\dfrac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \sqrt{y} = -\arctan x + C$. Eftersom

$\arctan x \to \pi/2$ då $x \to \infty$ gäller att $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \Rightarrow C = \pi/2$. Således är $y = (\frac{\pi}{2} - \arctan x)^2$ den sökta lösningen. Svar: $y = (\frac{\pi}{2} - \arctan x)^2$.

6. $f(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x 2t\arctan t\,dt = /\arctan t = t + r(t)$ där $r(t) = O(t^3)$ är integrerbar$/ = \frac{1}{x^n}\int_0^x (2t^2 + 2tr(t))\,dt = \frac{\frac{2x^3}{3} + O(x^5)}{x^n} = \frac{2/3 + O(x^2)}{x^{n-3}}$ ty $|\int_0^x 2tr(t)\,dt| \le |x| \cdot 2C|x^4| = O(x^5)$, eftersom $|r(t)| \le C|t^3|$ för $|t| \le |x|$.

   För $n > 3$ saknas gränsvärde, för $n = 3$ är gränsvärdet $2/3$ och för $n < 3$ är gränsvärdet 0 då $x \to 0$.

   En alternativ lösning är att direkt beräkna integralen. Svar: $f(0) = 2/3$ då $n = 3$ och $f(0) = 0$ då $n < 3$.

7. Ansätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Då gäller att $y' = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}$ och $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$. Vidare gäller att $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ och $y''(0) = 2 \Rightarrow c_2 = 1$.

   Insatt i differentialekvationen får vi att $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k+2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = \sum_{k=3}^{\infty}(k(k-1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2} - 2kc_k)x^k + 2c_0 = 0$ för alla $x$. Detta medför att $c_0 = 0$ och att $c_k = -\frac{(k-2)(k-3)}{k(k-1) - 2k + 2} \cdot c_{k-2} = -\frac{k-3}{k-1}c_{k-2}$ för $k \ge 3$. Således medför $c_1 = 0$ att $c_{2n+1} = 0$ för alla $n \ge 0$ och $c_2 = 1$ att $c_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ för $n \ge 1$. Vi får att $y = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x\arctan x$.

   Eftersom $|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)-1}}{\frac{x^{2n}}{2n-1}}| = \frac{2n-1}{2n+1}|x^2| = \frac{1 - 1/2n}{1 + 1/2n}|x^2| \to x^2$ då $k \to \infty$, visar kvotkriteriet att potensserien har konvergensradien 1 (precis som MacLaurinserien för $\arctan x$). En kontroll visar att $x\arctan x$ i själva verket är en lösning för alla $x$. Svar: Den sökta lösningen är $y = x\arctan x$.