Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Tentamen i Envariabelanalys 2, TATA42

2007–03–17 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och avslutade med ett svar. Varje uppgift ger högst 3 poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 8/12/16 poäng totalt, dels minst 2 poäng vardera på minst 3/4/5 uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(1+x^2)y' + xy = x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

2. Beräkna längden av kurvan $y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''' - y'' + 4y' - 4y = 2e^x$.

4. Undersök om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ är konvergent.

5. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$, (1p) (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$. (2p)

6. Beräkna volymen av den kropp som innesluts då kurvan $y = 4 - x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, roteras ett varv kring linjen genom kurvans ändpunkter, det vill säga punkterna $(0,4)$ och $(2,0)$ i xy-planet.

7. Visa att potensserien
$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!}$$
är konvergent för alla x och bestäm seriens summa.

Lycka till!

Svar m.m. Envariabelanalys 2, TATA42, 2007-03-17

1. $y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$. Integrerande faktor: $\sqrt{x^2+1}$. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\,y\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}\,y = \sqrt{x^2+1} + C \Rightarrow y = 1 + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$. Begynnelsevillkoret ger $C = -1$.
Svar: $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx$. Sökt längd$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2+4x^4}\,dx$
$= \int_{-1}^{1} \left(1+2x^2\right)\,dx = \frac{10}{3}$. Svar: $\frac{10}{3}$.

3. Karakteristiska ekvationen har lösningarna $1,\ \pm 2i$. $y_h = Ae^x + B\cos 2x + C\sin 2x$. $y = e^x z$ och förskjutningsregeln ger $z''' + 2z'' + 5z' = 2$. $z_p' = \frac{2}{5}$, $z_p = \frac{2}{5}x$ ger $y_p = \frac{2}{5}xe^x$.
Svar: $y = y_h + y_p = Ae^x + B\cos 2x + C\sin 2x + \frac{2}{5}xe^x$.

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \Rightarrow \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} \to \frac{1}{2}$,
$x \to \infty$. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ konvergerar $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergerar. Svar: Integralen är konvergent.

5. (a) $\frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right)}{x^3} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(x^2\right) \to \frac{1}{3},\ x \to 0$. Svar: $\frac{1}{3}$.

(b) $\frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{\cos\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right)}{x^4}$
$= \frac{1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}\left(x^5\right)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)^4 - 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}\left(x^6\right)}{x^4}$
$= \frac{-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x^4}{6} + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right) + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}\left(x^6\right) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}\left(x^6\right)}{x^4} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(x^2\right) \to \frac{1}{3},\ x \to 0$.
Svar: $\frac{1}{3}$.

6. Linjen genom kurvans ändpunkter: $y = 4 - 2x$. Areaelementet är $dA = (4 - x^2 - (4-2x))dx$ och med hjälp av likformiga trianglar fås tyngdpunktens väg: $2\pi\frac{2}{\sqrt{20}}\frac{1}{2}\left(4 - x^2 - (4-2x)\right)$.
Pappos-Guldins regel ger $dV = \frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(4 - x^2 - (4-2x)\right)^2\,dx$.
Sökt volym $= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_0^2 \left(4 - x^2 - (4-2x)\right)^2\,dx = \frac{16\sqrt{5}\pi}{75}$.

7. Vissa termer är lika med 0 så vi kan inte direkt använda kvotkriteriet.
$\left|2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\right| \le 2^{\frac{n}{2}}\frac{|x|^n}{n!} = b_n$. $x \neq 0$: $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{\sqrt{2}|x|}{n+1} \to 0,\ n \to \infty$. Kvotkriteriet ger att $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerar för alla reella x och det följer att den givna serien är absolutkonvergent för

alla x och därmed konvergent för alla x.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}\Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n+1}{2}}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}\Rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}(-2)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)-2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\frac{x^n}{n!}=2y'-2y$$

det vill säga y uppfyller differentialekvationen $y''-2y'+2y=0$ med begynnelsevillkoren $y(0)=y'(0)=1$. Karakteristiska ekvationen har rötterna $1\pm i$ och vi får $y=e^x(A\cos x+B\sin x)$. Begynnelsevillkoren ger $A=1,\ B=0$. Svar: $y=e^x\cos x$.

Alternativ: Betrakta $z=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x\right)^n=e^{(1+i)x}$ för alla reella x. $y=$ realdelen av $z=e^x\cos x$.