

Tentamen i Envariabelanalys 1

2019-08-27 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Beräkna följande obestämda integraler:

$$(a) \int \ln(2x) dx \quad (b) \int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx \quad (c) \int e^{2x} \sin(e^x) dx.$$

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3 - 2x)}{\sin(x - 1)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(1 + e^x)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. Beräkna den generaliserade integralen $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)} dx$ (eller visa divergens).

4. Visa att $\arctan(1 + 2x^2) - x^2 \geq \frac{\pi}{4} - x^4$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

5. (a) Definiera vad som menas med att F är en primitiv funktion till f på (det öppna) intervallet I .

(b) Visa att $\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x$ är en primitiv funktion till $\frac{2}{(x^2 + 1)^2}$.

(c) Till vilken funktion är $F(x) = \int_7^x \frac{\sin t}{1 + t^2} dt$ en primitiv funktion?

6. Två punkter A och B väljs på linjen $y = 1$ i xy -planet så att avståndet mellan origo och A är dubbelt så stort som avståndet mellan origo och B . Vilket är det kortaste möjliga avståndet mellan A och B ? (Motivera noga att det verkligen är ett *minsta* värde.)

7. Skissa grafen för $f(x) = \int_0^1 |x - t^2| dt$.

Lösningsskisser för TATA41 2019-08-27

1. (a) $\int \ln(2x) dx = \int 1 \cdot \ln(2x) dx = x \ln(2x) - \int x \frac{2}{2x} dx = x \ln(2x) - x + C.$
- (b) $\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx = x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C.$
- (c) Med $t = e^x$ fås $dt = e^x dx$ och $\int e^{2x} \sin(e^x) dx = \int t \sin t dt = t \cdot (-\cos t) - \int 1 \cdot (-\cos t) dt = -t \cos t + \sin t + C = \sin(e^x) - e^x \cos(e^x) + C.$

Svar: Se ovan.

2. (a) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3} \rightarrow \frac{2+1}{2+3} = \frac{3}{5}$ då $x \rightarrow 2.$
- (b) Variabelbytet $t = x - 1$ ger $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3-2x)}{\sin(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(3-2(1+t))}{\sin t} = -2,$ ty $\frac{\ln(1-2t)}{\sin t} = -2 \cdot \frac{\ln(1+(-2t))}{-2t} \cdot \frac{t}{\sin t} \rightarrow -2 \cdot 1 \cdot 1$ då $t \rightarrow 0,$ enligt standardgränsvärden.
- (c) Sätt $t = -x$ så erhålls $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+\ln(1+e^x)}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+\ln(1+e^{-t})}{\sqrt{t^2+1}} = -1,$ eftersom $\frac{-t+\ln(1+e^{-t})}{\sqrt{t^2+1}} = [\text{för } t > 0] = \frac{-t+\ln(1+e^{-t})}{t\sqrt{1+t^{-2}}} = \frac{-1+\frac{1}{t} \cdot \ln(1+e^{-t})}{\sqrt{1+t^{-2}}} \rightarrow \frac{-1+0 \cdot \ln(1+0)}{\sqrt{1+0}} = -1$ då $t \rightarrow \infty.$

Svar: (a) $\frac{3}{5}$ (b) -2 (c) $-1.$

3. Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ ger $x = t^2$ och $dx = 2t dt,$ så

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+2)} &= \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2t dt}{t(t^2+2)} = \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_{\sqrt{2}}^\omega = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Vi skriver olikheten som $f(x) \geq \pi/4,$ där $f(x) = \arctan(1 + 2x^2) - x^2 + x^4$ för $x \in \mathbf{R}.$ Från derivatan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x}{1 + (1 + 2x^2)^2} - 2x + 4x^3 = \frac{2x}{1 + 2x^2 + 2x^4} - 2x(1 - 2x^2) \\ &= \frac{2x(1 - (1 - 2x^4 - 4x^6))}{1 + 2x^2 + 2x^4} = \frac{4x^5(1 + 2x^2)}{1 + 2x^2 + 2x^4} \end{aligned}$$

ser man att f är strängt avtagande för $x \leq 0$ och strängt växande för $x \geq 0.$ Alltså är $f(0) = \arctan 1 = \pi/4$ globalt minimum, eller med andra ord $f(x) \geq \pi/4$ för alla $x \in \mathbf{R},$ vilket skulle visas.

5. (a) Det betyder att $F'(x) = f(x)$ för alla $x \in I.$
- (b) Derivering ger $\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x \right) = \dots = \frac{2}{(x^2+1)^2}.$
- (c) Integranden är kontinuerlig, så enligt analysens huvudsats är $F'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$
6. Vi kan anta att A och B ligger på samma sida om y -axeln (t.ex. till höger), för om de ligger på varsin sida blir avståndet större. Kalla avståndet från origo till B för $t;$ då kommer $2t$ att vara avståndet från origo till $A.$ Koordinaterna för B är $(x, y) = (\sqrt{t^2 - 1}, 1)$ enligt Pythagoras' sats, och på samma sätt är A 's koordinater $(x, y) = (\sqrt{(2t)^2 - 1}, 1).$ Avståndet mellan A och B är alltså

$$f(t) = \sqrt{4t^2 - 1} - \sqrt{t^2 - 1}, \quad t \geq 1.$$

Från derivatan

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{8t}{2\sqrt{4t^2-1}} - \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} = \frac{t(4\sqrt{t^2-1} - \sqrt{4t^2-1})}{\sqrt{4t^2-1}\sqrt{t^2-1}} \\ &= \frac{t(16(t^2-1) - (4t^2-1))}{\sqrt{4t^2-1}\sqrt{t^2-1}(4\sqrt{t^2-1} + \sqrt{4t^2-1})} \\ &= \frac{12t(t^2 - \frac{5}{4})}{\sqrt{4t^2-1}\sqrt{t^2-1}(4\sqrt{t^2-1} + \sqrt{4t^2-1})}, \quad t > 1, \end{aligned}$$

(och från f 's kontinuitet i punkten $t = 1$) ser man att f är strängt avtagande på intervallet $[1, \sqrt{5}/2]$ och strängt växande på intervallet $[\sqrt{5}/2, \infty[$. Det minsta värdet är alltså $f(\sqrt{5}/2) = \sqrt{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

Svar: Kortaste möjliga avstånd är $3/2$ (när $A = (2, 1)$ och $B = (\frac{1}{2}, 1)$).

7. Funktionen $f(x) = \int_0^1 |x - t^2| dt$ har definitionsmängd $D_f = \mathbf{R}$, och beräkning görs med falluppdelning:

- Om $x \geq 1$ är $x - t^2 \geq 0$ för alla t i integrationsintervallet $[0, 1]$, så

$$f(x) = \int_0^1 (x - t^2) dt = \left[xt - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = x - \frac{1}{3}.$$

- Om $x \leq 0$ är $x - t^2 \leq 0$ för alla t i integrationsintervallet $[0, 1]$, så

$$f(x) = \int_0^1 (-(x - t^2)) dt = -(x - \frac{1}{3}).$$

- Om $0 < x < 1$ så växlar $x - t^2$ tecken inuti integrationsintervallet, vid $t = \sqrt{x}$, så

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\sqrt{x}} (x - t^2) dt + \int_{\sqrt{x}}^1 (-(x - t^2)) dt \\ &= \left[xt - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^{\sqrt{x}} - \left[xt - \frac{1}{3}t^3 \right]_{\sqrt{x}}^1 \\ &= \frac{4}{3}x^{3/2} - x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Att rita grafen $y = f(x) = \pm(x - \frac{1}{3})$ för $x \leq 0$ och för $x \geq 1$ är ju inte så svårt, men i mittenintervallet behöver vi räkna ut derivatan:

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} - 1, \quad 0 < x < 1.$$

Vi ser att $f'(x)$ växlar tecken från minus till plus då $x^{1/2} = \frac{1}{2}$, dvs. då $x = \frac{1}{4}$. Grafen ser alltså ut såhär, med minsta värdet $f(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$:

