Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

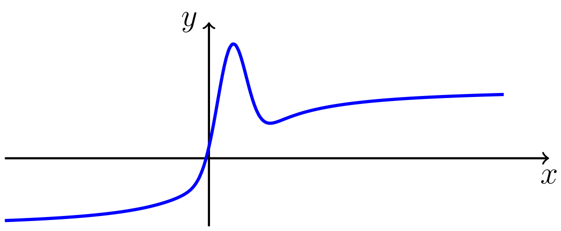
2019-06-10 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Låt $f(x) = (x^3 + 4)\, e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$.
   (a) Bestäm f:s värdemängd V_f.
   (b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ för varje $k \in \mathbf{R}$.

2. (a) Skissa grafen för en funktion $f(x)$ som har ett lokalt minimum i $x = 2$, men saknar minsta värde.
   (b) Skissa grafen för derivatan $g'(x)$, om grafen för $g(x)$ ser ut så här:



   (c) Skissa grafen för en funktion $h(x)$, med definitionsmängd $D_h =]2, 5[$, som är strängt växande och kontinuerlig, men inte deriverbar.

3. Beräkna följande derivator direkt utifrån derivatans definition. Standardgränsvärden får användas.

   (a) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$ (b) $\dfrac{d}{dx}\ln x, \quad x > 0$ (c) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{2x}, \quad x > 0$

4. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{1+x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+4x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$

5. Ett rätblock (”tegelsten”) har volymen 3, och på bottensidan är en av kanterna dubbelt så lång som den andra. Vad är den minsta möjliga summan av rätblockets kantlängder (alla 12 kanterna)?

6. Funktionen $f(x) = \cos x$, $\pi \leq x \leq 2\pi$, har en invers g. Bestäm $g'(1/2)$.

7. Undersök $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$.

Lösningsskisser för TATA41 2019-06-10

1. Man kan notera att funktionen $f(x) = (x^3 + 4)\,e^{-x}$ har exakt ett reellt nollställe, nämligen $x = -\sqrt[3]{4}$, där f växlar från att vara negativ till att bli positiv. (Då har man redan svaret till (b)-uppgiften i fallet $k = 0$: ekvationen $f(x) = 0$ har *en* lösning.)

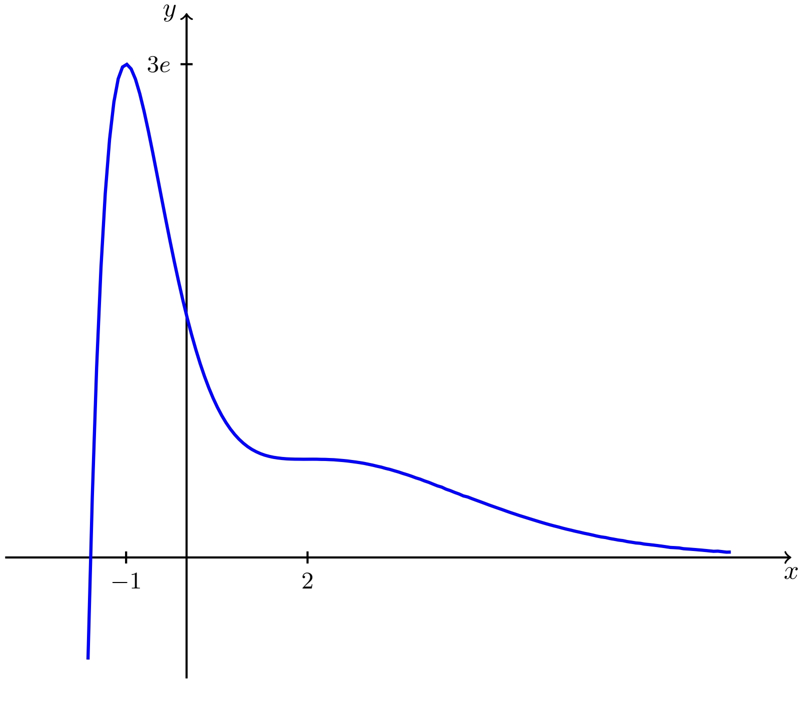
   Derivatan

   $$f'(x) = 3x^2\,e^{-x} + (x^3+4)\,(-e^{-x}) = -(x^3-3x^2+4)\,e^{-x} = -(x+1)(x-2)^2\,e^{-x}$$

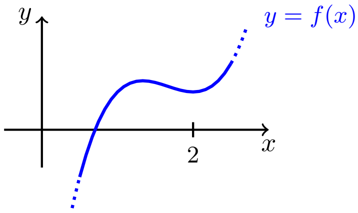
   ger följande teckentabell:

x		-1		2	
-1	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
e^{-x}	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	terrass-punkt	$\searrow$

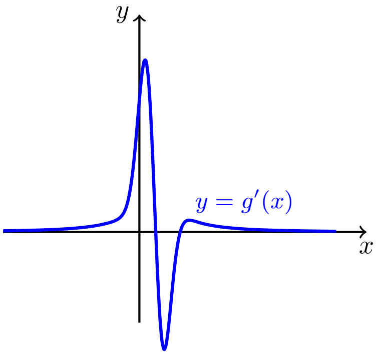
   Gränsvärden: $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ (uppenbart) och $f(x) = \frac{x^3+4}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärde, e^x växer snabbare än polynom). Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$ och läsa av svaren därifrån:

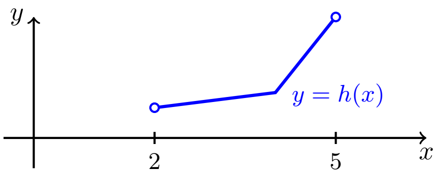


   Svar: (a) $V_f =]-\infty, 3e]$. (b) Ekvationen $f(x) = k$ har en lösning om $k \leq 0$ eller $k = 3e$, två lösningar om $0 < k < 3e$, och ingen lösning om $k > 3e$.

2. (a) T.ex. 

(där $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$).

(b) 

(c) T.ex. 

3. Ställ upp differenskvoten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ och beräkna gränsvärdet då $h \to 0$:

(a) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2} = \frac{-2xh-h^2}{h(x+h)^2x^2} = \frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} \to \frac{-2x-0}{(x+0)^2x^2} = \frac{-2}{x^3}$.

(b) $\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h} = \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x} \to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

(c) $\frac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h} = \frac{2(x+h)-2x}{h(\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x})} = \frac{2}{\sqrt{2(x+h)}+\sqrt{2x}} \to \frac{2}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

4. (a) $\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln(1+x^2)\right]_0^1 = -\frac{2}{3}+\ln 2$.

(b) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+4x}\,dx = \int_{-3}^{-2} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx = \frac{1}{4}\big[\ln|x| - \ln|x+4|\big]_{-3}^{-2} = \frac{1}{4}\big((\ln 2 - \ln 2) - (\ln 3 - \ln 1)\big) = -\frac{1}{4}\ln 3$.

(c) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 4\big[-\cos x\big]_0^{\pi/2} = 4\big(0-(-1)\big) = 4$.

Svar: Se ovan.

Anm.: Som rimlighetskontroll, notera att integralen i (b) måste bli negativ, eftersom $\frac{1}{x^2+4x} = \frac{1}{x(x+4)} < 0$ i det aktuella intervallet $-3 \le x \le 2$ (faktorn x är negativ och faktorn $x+4$ är positiv). Och integralen i (c) måste mycket uppenbart bli positiv, pga. absolutbeloppet.

I (a)-uppgiften är tecken hos svaret $-\frac{2}{3}+\ln 2$ kanske inte lika uppenbart, om man inte råkar minnas att $\ln 2 \approx 0{,}69$. Men man kan vända på resonemanget och säga att eftersom $\frac{x^2(1-x)^2}{1+x^2} > 0$ för $0 < x < 1$ så måste integralen bli positiv, och denna uträkning utgör därför ett bevis för att $\ln 2 > \frac{2}{3}$. Den som är road av sådant kan på liknande sätt bevisa att $\pi < \frac{22}{7}$ genom att beräkna $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$. Testa får du se!

5. Om bottenkanternas längder är x och $2x$, så måste höjden vara $\frac{3}{x \cdot 2x}$ om volymen ska bli 3, så summan av kantlängderna är (eftersom det finns fyra kanter av varje typ)

$$f(x) = 4\left(x + 2x + \frac{3}{2x^2}\right) = 12\left(x + \frac{1}{2x^2}\right), \qquad x > 0.$$

Derivatan är

$$f'(x) = 12\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{12(x^3 - 1)}{x^3}, \qquad x > 0,$$

vilket är negativt för $0 < x < 1$ och positivt för $x > 1$. Så $f(1) = 18$ är minsta värdet.

Svar: Minsta möjliga värdet för summan av de 12 kanternas längder är 18 (då kanterna är 1, 2 och 3/2).

6. Ekvationen $f(x) = 1/2$, dvs. $\cos x = 1/2$ där $\pi \leq x \leq 2\pi$, har lösningen $x = 5\pi/3$, så $g(1/2) = 5\pi/3$. Inversens derivata är därmed

$$g'(1/2) = \frac{1}{f'(g(1/2))} = \frac{1}{f'(5\pi/3)} = \frac{1}{-\sin(5\pi/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Förutsättningarna för satsen om derivata av invers funktion är uppfyllda eftersom $f'(g(1/2)) \neq 0$ och g är kontinuerlig på $[-1, 1]$.)

Alternativt kan man beräkna $g(x) = f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x = 3\pi/2 + \arcsin x$ och derivera direkt: $g'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ ger $g'(1/2) = 1/(\sqrt{3}/2)$.

Svar: $2/\sqrt{3}$.

7. Olikheten $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$ för alla reella u och v fås med medelvärdessatsen för derivator (jfr. övn. 4.27(a) i kursboken, dvs. Forsling & Neymark, andra upplagan):

$$|\sin u - \sin v| = |\cos \xi \cdot (u - v)| = \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} |u - v| \leq |u - v|$$

(där ξ är något tal mellan u och v).

Alternativt, gör som i övning 2.42 i boken:

$$|\sin u - \sin v| = \left|2 \cos \tfrac{u+v}{2} \sin \tfrac{u-v}{2}\right| = 2 \underbrace{\left|\cos \tfrac{u+v}{2}\right|}_{\leq 1} \underbrace{\left|\sin \tfrac{u-v}{2}\right|}_{\leq \left|\frac{u-v}{2}\right|} \leq |u - v|.$$

Detta ger

$$\left|\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}\right| \leq \left|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right|,$$

och eftersom

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty,$$

följer det från instängningsregeln att även

$$\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \to 0 \quad \text{då } x \to \infty.$$

Svar: 0.