

Tentamen i Envariabelanalys 1

2019-04-24 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Skissa grafen för $f(x) = 2 \ln|x| - \arctan 3x - \ln(1 + 9x^2)$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \ln(1 + e^x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

3. Beräkna de obestämda integralerna

$$(a) \int x^2 \cos 2x \, dx \quad (b) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} \, dx \quad (c) \int \frac{dx}{x(1 + x^{25})}.$$

4. Bestäm värdemängden till $f(x) = x^{1/x^2}$, $x > 0$.

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2} dx$ (eller visa divergens).

6. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

(b) Antag att $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$, där I är ett intervall. Visa att f är en konstant funktion på I .

(c) Ange en icke-konstant funktion f som uppfyller $f'(x) = 0$ för alla $x \in D_f$.

7. Undersök gränsvärdet $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \frac{1}{\sqrt{2k^2 - m^2}}$.