Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2019-03-21 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida, där även tid för tentamensvisning meddelas när resultaten är klara.

1. Skissa grafen för $f(x) = \ln|2x+1| + \dfrac{2}{x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna

   (a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$ (b) $\displaystyle\int \cos x \sin x\, e^{\cos x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \ln(1+2x^2)\,dx$.

3. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är strängt växande på $\mathbf{R}$.

   (b) Ange en funktion som är strängt växande på $\mathbf{R}$ men inte deriverbar överallt.

   (c) Ange en funktion som är deriverbar och strängt växande på $\mathbf{R}$, med en derivata som inte är positiv överallt.

4. Hur många reella lösningar har ekvationen $(x-1)e^{x-x^2} = k$ för olika värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$?

5. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$ (eller visa divergens).

6. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är deriverbar i punkten a.

   (b) Härled derivatan av $f(x) = \sin x$ utifrån definitionen och kända standardgränsvärden.

7. Beräkna $\displaystyle\int \ln x \arcsin x\,dx$.

Lösningsskisser för TATA41 2019-03-21

1. Funktionen $f(x) = \ln|2x+1| + \frac{2}{x+1}$ är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$ utom $x = -\frac{1}{2}$ och $x = -1$, och har derivatan

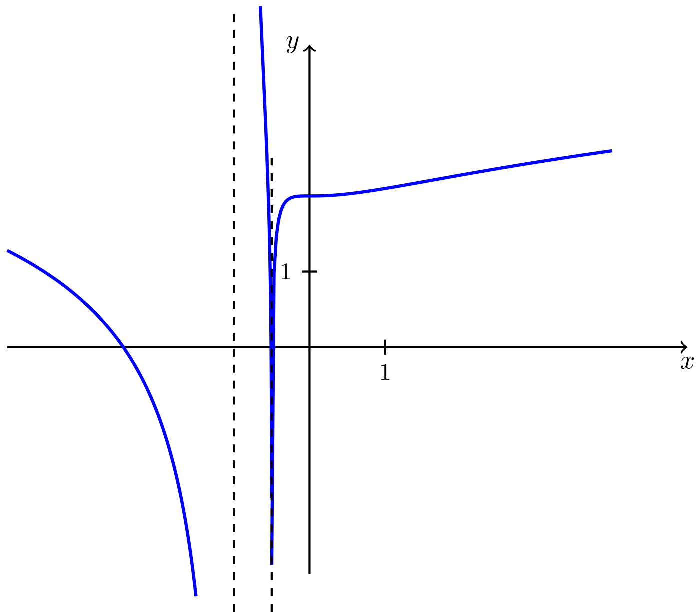
$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2}{(2x+1)(x+1)^2},$$

vilket ger teckentabellen

x		-1		$-\frac{1}{2}$		0	
$2x^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	ej def.	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$

Relevanta gränsvärden (samtliga tämligen uppenbara): $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$, $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\frac{1}{2}$, samt $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to (-1)^{\pm}$.

Graf (där man kan notera att terrassen ligger på höjden $f(0) = 2$):



Svar: Linjerna $x = -1$ och $x = -\frac{1}{2}$ är lodräta asymptoter. Lokala extrempunkter och vågräta asymptoter saknas.

2. (a) $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right) dx = 3\ln|x-3| - 2\ln|x-2| + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \cos x$ (med $dt = -\sin x\,dx$) och partiell integration ger $\int \cos x\, e^{\cos x} \sin x\,dx = -\int t\,e^t\,dt = -(t-1)e^t + C = (1-\cos x)\,e^{\cos x} + C$.

   (c) Partiell integration och polynomdivision ger $\int \ln(1+2x^2)\,dx = x\ln(1+2x^2) - \int x\frac{4x}{1+2x^2}\,dx = x\ln(1+2x^2) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+2x^2}\right)dx = x\ln(1+2x^2) - 2x + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x) + C$.

Svar: Se ovan.

3. (a) Funktionen f sägs vara strängt växande på $\mathbf{R}$ om och endast om olikheten $f(x_1) < f(x_2)$ gäller för alla reella tal x_1 och x_2 sådana att $x_1 < x_2$.

(b) T.ex. $f(x) = x$ för $x < 0$, $x + 1$ för $x \geq 0$; den funktionen är ju inte ens kontinuerlig, än mindre deriverbar. Eller $f(x) = 2x + |x|$, som är kontinuerlig men inte deriverbar. (I båda fallen är det uppenbart från f:s graf att f är strängt växande.)

(c) Standardexemplet är $f(x) = x^3$, vars derivata $f'(x) = 3x^2$ är lika med noll för $x = 0$.

För den som tvivlar på att denna funktion verkligen är strängt växande på $\mathbf{R}$: detta kan ses direkt från definitionen genom att skriva

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\big((x_2 + \tfrac{1}{2}x_1)^2 + \tfrac{3}{4}x_1^2\big),$$

eller genom att resonera som i sista stycket i Anm. 4.2 i kursboken (Forsling & Neymark, andra uppl., s. 198).

4. Sätt $f(x) = (x - 1)e^{x - x^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Derivatan är

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-x^2} + (x - 1) \cdot (1 - 2x)e^{x-x^2} = x(3 - 2x)e^{x-x^2}.$$

Teckentabell:

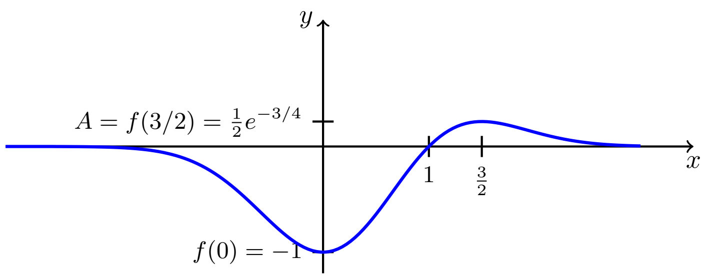
x		0		$3/2$	
x	$-$	0	$+$		$+$
$3 - 2x$	$+$		$+$	0	$-$
e^{x-x^2}	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Relevanta gränsvärden:

$$f(x) = \frac{x-1}{e^{x^2-x}} = \underbrace{\frac{x-1}{x^2-x}}_{=\frac{1}{x}\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2-x}{e^{x^2-x}}}_{\to 0} \to 0 \qquad \text{då } x \to \pm\infty,$$

eftersom $t = x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x}) \to \infty$, och $\lim_{t\to\infty} t/e^t = 0$ (standardgränsvärde).

Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$ och räkna antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ genom att läsa av hur många gånger linjen $y = k$ skär kurvan:



Svar: Låt $A = \frac{1}{2}e^{-3/4}$. Ekvationen $(x - 1)e^{x-x^2} = k$ har två lösningar om $-1 < k < 0$ eller $0 < k < A$. Den har en lösning om $k = -1$, $k = 0$ eller $k = A$. Den saknar lösning om $k < -1$ eller $k > A$.

5. Variabelbytet $t = e^x$ (med $x = \ln t$, $dx = dt/t$) ger

$$\int_0^\infty \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 2}\, dx = \int_1^\infty \frac{t+1}{t^2 + 2t + 2}\, \frac{dt}{t}.$$

Primitiv funktion (för $t > 0$) beräknas med partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned}
\int \frac{t+1}{t(t^2+2t+2)}\, dt &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+2t+2} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{(t+1)-1}{(t+1)^2+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln t - \frac{1}{2} \ln\bigl((t+1)^2+1)\bigr) + \arctan(t+1) \right) + C \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{t^2}{t^2+2t+2} + \frac{1}{2} \arctan(t+1) + C.
\end{aligned}$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{t+1}{t^2+2t+2}\, \frac{dt}{t} &= \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{1}{4} \ln \frac{1}{1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} + \frac{1}{2} \arctan(t+1) \right]_1^\omega \\
&= \left(\frac{1}{4} \ln \frac{1}{1+0+0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \arctan 2 \right) \\
&= \frac{\ln 5}{4} + \frac{\pi/2 - \arctan 2}{2}.
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{\ln 5}{4} + \dfrac{\arctan \frac{1}{2}}{2}$.

6. Se kurslitteraturen.

   (Forsling & Neymark, andra uppl., Def. 4.1 och beviset av Sats 4.5(a).)

7. Integranden är bara definierad för $0 < x \leq 1$, och för att undvika problem med att $\arcsin x$ inte är deriverbar i $x = 1$ förutsätter vi hela tiden nedan att x ligger i intervallet $0 < x < 1$.

Vi beräknar först en primitiv funktion till $\arcsin x$:

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1.$$

Partiell integration med hjälp av detta ger

$$\begin{aligned} \int \ln x \arcsin x \, dx &= \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) \ln x - \int \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) \ln x - \int \arcsin x \, dx - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \, dx. \end{aligned}$$

Primitiv till $\arcsin x$ har vi redan räknat ut, så det som återstår är den sista termen, som vi t.ex. kan beräkna genom att sätta $t = x^2 \in \,]0, 1[$ och sedan $s = \sqrt{1-t} \in \,]0, 1[$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \, dx &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, x \, dx = \int \frac{\sqrt{1-t}}{t} \, \frac{dt}{2} = \int \frac{s}{1-s^2} \, (-s) \, ds \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1-s^2}\right) ds = s - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right) ds \\ &= s - \frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s} + C_2 = s - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+s)^2}{1-s^2} + C_2 \\ &= s - \ln \frac{(1+s)}{\sqrt{1-s^2}} + C_2 = \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C_2 \\ &= \sqrt{1-x^2} - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln x + C_2. \end{aligned}$$

Allt som allt, därmed:

$$\begin{aligned} \int \ln x \arcsin x \, dx = {} & \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) \ln x \\ & - (x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) \\ & - (\sqrt{1-x^2} - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln x) + C \\ = {} & (\ln x - 1) \, x \arcsin x - 2\sqrt{1-x^2} + \ln(1+\sqrt{1-x^2}) \\ & + (\sqrt{1-x^2} - 1) \ln x + C. \end{aligned}$$

Svar: Se ovan.