

Tentamen i Envariabelanalys 1

2019-01-18 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = 2 \ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \frac{x}{x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Beräkna de obestämda integralerna

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} \quad (b) \int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx \quad (c) \int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

3. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right).$$

4. Beräkna den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ (eller visa divergens).
5. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $\ln x = \frac{k}{\sqrt{x}}$ för alla reella värden på konstanten k .
6. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler.
(b) Undersök gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{3x} \cos(t^2) dt$.
7. En rät linje i xy -planet innehåller punkten $(1, 8)$. Vilken är den minsta längd som den del av linjen som ligger i första kvadranten (alltså området $x \geq 0, y \geq 0$) kan ha? (Motivera noga att längden blir minimal.)