

Tentamen i Envariabelanalys 1

2019-01-18 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = 2 \ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \frac{x}{x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Beräkna de obestämda integralerna

$$(a) \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} \quad (b) \int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx \quad (c) \int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

3. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x + e^x} - 1}{x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right).$$

4. Beräkna den generaliserade integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx$ (eller visa divergens).
5. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $\ln x = \frac{k}{\sqrt{x}}$ för alla reella värden på konstanten k .
6. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler.
(b) Undersök gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{3x} \cos(t^2) dt$.
7. En rät linje i xy -planet innehåller punkten $(1, 8)$. Vilken är den minsta längd som den del av linjen som ligger i första kvadranten (alltså området $x \geq 0, y \geq 0$) kan ha? (Motivera noga att längden blir minimal.)

Lösningsskisser för TATA41 2019-01-18

1. Funktionen

$$f(x) = 2 \ln(x+1) - \ln(x^2+1) + \frac{x}{x+1}, \quad x > -1,$$

har derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x+1)^2(x^2+1)}, \quad x > -1,$$

vilket ger följande teckentabell:

x		-1		$\sqrt{3}$	
$\frac{-(x+\sqrt{3})}{(x+1)^2(x^2+1)}$...	ej def.	-	0	-
$x - \sqrt{3}$...		-	0	+
$f'(x)$	ej def.	ej def.	+	0	-
$f(x)$	ej def.	ej def.	↗	lok. max.	↘

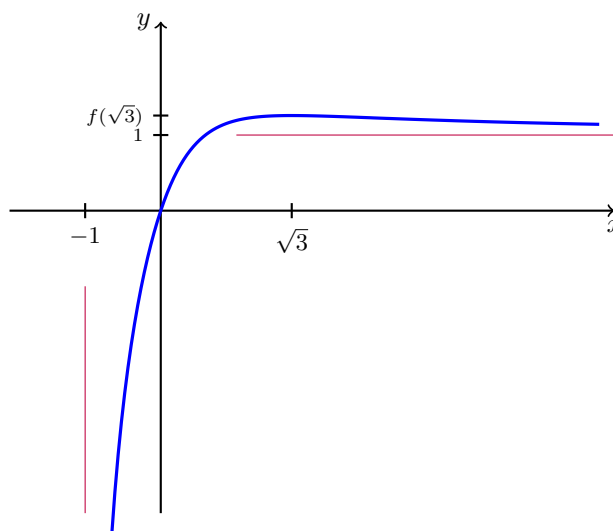
Gränsvärde då $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{x}{x+1} = \ln \frac{(1+\frac{1}{x})^2}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow \ln \frac{(1+0)^2}{1+0} + \frac{1}{1+0} = 1.$$

Och då $x \rightarrow (-1)^+$:

$$f(x) = \underbrace{2 \ln(x+1)}_{\rightarrow -\infty} - \underbrace{\ln(x^2+1)}_{\rightarrow \ln 2} + \underbrace{x}_{\rightarrow -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\rightarrow \infty} \rightarrow -\infty.$$

Det kan möjligen även vara värt att notera att $f(0) = 0$. Grafen ser alltså ut såhär:



Svar: Funktionen har ett lokalt maximum $f(\sqrt{3}) = 2 \ln(1+\sqrt{3}) - \ln 4 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (vilket f.ö. även är globalt maximum). Linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot, och linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot.

2. (a) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{\ln|x-3| - \ln|x-1|}{2} + C.$
- (b) $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(x+3)dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+4} + \int \frac{2dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \arctan \frac{x+1}{2} + C.$
- (c) Med $t = \sqrt{x}$, och alltså $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, fås $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin^3 t dt = 2 \int (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \frac{2}{3} \cos^3 t - 2 \cos t + C = \frac{2}{3} \cos^3(\sqrt{x}) - 2 \cos(\sqrt{x}) + C.$

Svar: Se ovan.

3. (a) $\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \frac{x+2}{2x+3} \rightarrow \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$ då $x \rightarrow 1.$
- (b) $\frac{\sqrt{2x+e^x}-1}{x} = \frac{2x+e^x-1}{x(\sqrt{2x+e^x}+1)} = \frac{2+(e^x-1)/x}{\sqrt{2x+e^x}+1} \rightarrow \frac{2+1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{3}{2}$ då $x \rightarrow 0$, enligt ett standardgränsvärde.
- (c) $\frac{1}{x^2} + \ln x = \frac{1}{x^2}(1 + x^2 \ln x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$, eftersom $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ och $1 + x^2 \ln x \rightarrow 1 + 0 > 0$ (enligt standardgränsvärdet $x^a \ln x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$ om a är en positiv konstant).

Svar: (a) $3/5$ (b) $3/2$ (c) ∞ .

4. Integralen är generaliserad i både ∞ och $-\infty$, så vi måste dela upp den, lämpligen vid $x = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-(-x)} dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx,$$

där integralen räknas som konvergent om och endast om båda delintegralerna är konvergenta. Av symmetriskäl är delintegralerna lika, så det räcker att undersöka den ena; upprepad partiell integration ger

$$\int_0^{\omega} x^2 e^{-x} dx = \left[-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \right]_0^{\omega} = 2 - \frac{\omega^2 + 2\omega + 2}{e^{\omega}},$$

vilket går mot $2 - 0 = 2$ då $\omega \rightarrow \infty$ (standardgränsvärde, "hastighetstabel"). Den integral som frågan gällde är alltså konvergent, med värdet $2 + 2 = 4$.

Svar: 4.

5. Ekvationen $\ln x = k/\sqrt{x}$ är ekvivalent med $f(x) = k$, där $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ för $x > 0$. Teckenstudium av derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

visar att f är strängt avtagande på intervallet $0 < x \leq e^{-2}$ och strängt växande på intervallet $x \geq e^{-2}$, med globalt minimum $f(e^{-2}) = -2e^{-1}$. Vidare gäller $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$ (samma standardgränsvärde som i uppgift 2(c)) och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ (uppenbart). Från grafen $y = f(x)$ avläser man sedan enkelt antalet lösningar.

Svar: Ekvationen har två reella lösningar om $-2/e < k < 0$, en lösning om $k = -2/e$ eller $k \geq 0$, och ingen lösning om $k < -2/e$.

6. (a) See kursboken (Forsling & Neymark), sats 6.5.
 (b) Låt $x > 0$. Eftersom $\cos(t^2)$ är en kontinuerlig funktion finns det enligt medelvärdesatsen ett tal ξ sådant att $x < \xi < 3x$ och

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{3x} \cos(t^2) dt = \frac{1}{x} \cdot (3x - x) \cos(\xi^2) = 2 \cos(\xi^2).$$

Instängningen medför att $\xi \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0^+$, vilket gör att $g(x) \rightarrow 2 \cos(0^2) = 2$ då $x \rightarrow 0^+$.

(Detta argument är lite handviftande, eftersom ξ inte är en funktion av x . Om man vill vara noggrannare kan man göra såhär: Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $2 \cos(t^2)$ är en kontinuerlig funktion finns det ett $\delta > 0$ sådant att $|2 \cos(t^2) - 2| < \varepsilon$ närhelst $|t| < \delta$. För godtyckligt x med $0 < x < \delta/3$ kan man hitta ett ξ enligt ovan, som då kommer att uppfylla $0 < \xi < 3x < \delta$, så att $|g(x) - 2| = |2 \cos(\xi^2) - 2| < \varepsilon$. Detta visar att $g(x) \rightarrow 2$ då $x \rightarrow 0^+$.)

Alternativt: eftersom $\cos(t^2)$ är strängt avtagande för små $t > 0$ gäller

$$\cos(x^2) > \cos(t^2) > \cos((3x)^2)$$

för $x < t < 3x$, om $x > 0$ är tillräckligt litet. Monotonicitetssegenskapen hos integralen medför, för sådana x , att

$$\int_x^{3x} \cos(x^2) dt > \int_x^{3x} \cos(t^2) dt > \int_x^{3x} \cos((3x)^2) dt,$$

dvs. (efter beräkning av integralerna i ytterleden samt division med det positiva talet x)

$$2 \cos(x^2) > \frac{1}{x} \int_x^{3x} \cos(t^2) dt > 2 \cos((3x)^2).$$

Ytterleden går här mot 2 då $x \rightarrow 0^+$, så enligt instängningsregeln går även funktionen i mittenledet mot 2.

Svar: 2.

7. Linjen måste luta snett neråt för att den del som ligger i första kvadranten ska ha ändlig längd, så det räcker att undersöka fallet med negativ riktningskoefficient. Linjens ekvation är då $y = 8 - k(x - 1)$ med $k > 0$, så den skär axlarna i punkterna $(x, y) = (1 + \frac{8}{k}, 0)$ och $(x, y) = (0, 8 + k)$. Enligt Pythagoras' sats är längden av linjesegmentet mellan dessa punkter lika med $L(k) = \sqrt{f(k)}$, där

$$f(k) = \left(1 + \frac{8}{k}\right)^2 + (8 + k)^2 = (8 + k)^2 \left(\frac{1}{k^2} + 1\right), \quad k > 0.$$

Derivatans av f är

$$f'(k) = 2(8 + k) \left(\frac{1}{k^2} + 1\right) + (8 + k)^2 \left(\frac{-2}{k^3}\right) = \frac{2(8 + k)(k^3 - 8)}{k^3}, \quad k > 0,$$

där alla faktorer är positiva för $k > 0$, utom $k^3 - 8$ som är negativ för $0 < k < 2$ och positiv för $k > 2$ (eftersom k^3 är strängt växande). Detta medför att f är strängt avtagande på intervallet $0 < k \leq 2$ och strängt växande på intervallet $k \geq 2$, så f har globalt minimum $f(2) = (1 + 4)^2 + (8 + 2)^2 = 125$, och linjesegmentets minimala längd är därmed $L(2) = \sqrt{f(2)} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Svar: $5\sqrt{5}$.