

Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-08-28 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna de obestämda integralerna

$$(a) \int \arctan 2x \, dx \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad (c) \int \frac{dx}{\cos 3x}.$$

2. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x} + \sqrt{x})}{3x + \ln x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{-1/x} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}.$$

3. Skissa grafen för $f(x) = x^2 - 20 + 8 \arctan 2x - \frac{13}{4} \ln(1 + 4x^2)$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

4. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a .
(b) Definiera vad som menas med att en funktion f är deriverbar i en punkt a .
(c) Visa att f är kontinuerlig i a om f är deriverbar i a .

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} dx$ (eller visa divergens).

6. En rektangel har ett hörn i origo, ett till på x -axeln och ett till på y -axeln. Det fjärde hörnet ligger på grafen till $f(x) = \frac{e^{-x^3+6x^2-9x}}{x}$, $x > 0$. Vilka värden kan rektangelns area anta?

7. Undersök gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(\frac{2x+1}{x} \right)^{\frac{x}{2x+1}} - \sqrt{2} \right)$.

Lösningsskisser för TATA41 2018-08-28

1. (a) $\int \arctan 2x \, dx = x \arctan 2x - \int x \frac{2}{1+(2x)^2} \, dx = x \arctan 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C.$
- (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x/\sqrt{2})^2}} = \arcsin(x/\sqrt{2}) + C.$
- (c) $\int \frac{dx}{\cos 3x} = \int \frac{\cos 3x \, dx}{\cos^2 3x} = \int \frac{\cos 3x \, dx}{1-\sin^2 3x} = [s = \sin 3x] = \int \frac{(1/3) \, ds}{1-s^2} = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right) ds = \frac{1}{6} (\ln |1+s| - \ln |1-s|) + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x} + C.$

Svar: Se ovan.

2. (a) $\frac{\ln(e^{2x} + \sqrt{x})}{3x + \ln x} = \frac{2x + \ln(1 + \sqrt{x}/e^{2x})}{3x + \ln x} = \frac{2 + \frac{1}{x} \ln(1 + \sqrt{x}/e^{2x})}{3 + \frac{\ln x}{x}} \rightarrow \frac{2+0 \cdot \ln(1+0)}{3+0} = 2/3$ då $x \rightarrow \infty$, enligt standardgränsvärden.
- (b) $(1+3x)^{-1/x} = e^{-3 \frac{\ln(1+3x)}{3x}} \rightarrow e^{-3 \cdot 1} = 1/e^3$ då $x \rightarrow 0$, enligt ett standardgränsvärde.
- (c) $\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}) \sin 2x}{(x+3) - 3} = 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{3}) \frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) \cdot 1 = 4\sqrt{3}$ då $x \rightarrow 0$, enligt ett standardgränsvärde.

Svar: Se ovan.

3. Funktionen $f(x) = x^2 - 20 + 8 \arctan 2x - \frac{13}{4} \ln(1+4x^2)$ är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$, med derivatan

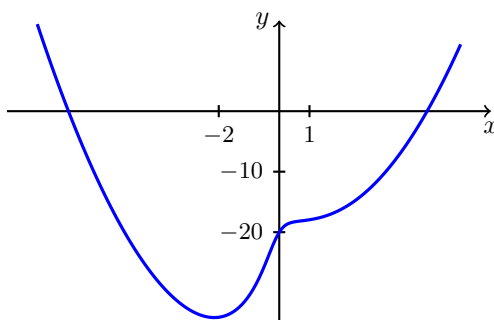
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \frac{8 \cdot 2}{1+(2x)^2} - \frac{13}{4} \frac{8x}{1+4x^2} = \frac{2x(1+4x^2) + 16 - 26x}{1+4x^2} \\ &= \frac{8x^3 - 24x + 16}{1+4x^2} = \frac{8(x+2)(x-1)^2}{1+4x^2}. \end{aligned}$$

Teckentabell:

x	-2		1	
$8(x+2)$	-	0	+	+
$(x-1)^2$	+		+	0
$1+4x^2$	+		+	+
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	terrasspunkt \nearrow

Gränsvärden: $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \pm\infty$, eftersom x^2 är dominerande term:

$$f(x) = x^2 \left(1 + \underbrace{\frac{-20 + 8 \arctan 2x + \frac{13}{4} \ln(x^2) + \frac{13}{4} \ln(x^{-2} + 4)}{x^2}}_{\rightarrow 0 \text{ (enl. std.gr.v. } \ln t/t \rightarrow 0 \text{ då } t \rightarrow \infty)} \right).$$



Svar: Lokalt minimum $f(-2) = -16 - 8 \arctan 4 - \frac{13}{4} \ln 17$ (vilket även är globalt minimum). Asymptoter saknas.

4. Se kurslitteraturen.

5. Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\int x \cdot \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx &= x \cdot \frac{-1}{e^x + 1} - \int 1 \cdot \frac{-1}{e^x + 1} dx \\ &= \frac{-x}{e^x + 1} + \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} = \frac{-x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + C\end{aligned}$$

så att

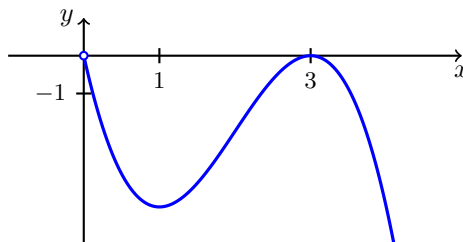
$$\int_0^\infty \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{-x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) \right]_0^\omega = (0 - 0) - (0 - \ln 2) = \ln 2.$$

Svar: $\ln 2$.

6. Arealan av rektangeln är

$$A(x) = x f(x) = e^{-x^3 + 6x^2 - 9x}, \quad x > 0.$$

Uttrycket i exponenten, kalla det $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$, har derivatan $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$, så enligt en enkel teckentabell får grafen $y = g(x)$ följande utseende för $x > 0$ (där $g(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$):



För $x > 0$ antar $g(x)$ alltså alla värden från $g(3) = 0$ och neråt, och $A(x) = e^{g(x)}$ antar därmed alla positiva värden mindre än eller lika med $e^0 = 1$.

Svar: Arealan kan anta alla värden i intervallet $]0, 1]$.

7. Med $t = 1/x$ erhålls

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(\frac{2x+1}{x} \right)^{\frac{x}{2x+1}} - \sqrt{2} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2+t)^{1/(2+t)} - \sqrt{2}}{t} \\ &= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{(2+t)^{1/(2+t)}}{\sqrt{2}} - 1}{t} \\ &= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{g(t)} - 1}{t} \\ &= \sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{g(t)} - 1}{g(t)} \frac{g(t)}{t}, \end{aligned}$$

om vi sätter

$$g(t) = \ln \frac{(2+t)^{1/(2+t)}}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(2+t)}{2+t} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Vi ser att

$$\begin{aligned} \frac{g(t)}{t} &= \frac{1}{t} \cdot \frac{2 \ln(2+t) - (2+t) \ln 2}{2(2+t)} = \frac{\frac{2}{t}(\ln(2+t) - \ln 2) - \frac{1}{t} t \ln 2}{2(2+t)} \\ &= \frac{\frac{\ln(1+t/2)}{t/2} - \ln 2}{2(2+t)} \rightarrow \frac{1 - \ln 2}{4} \quad \text{då } t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

vilket även medför att $g(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow 0$ och att $g(t) \neq 0$ i en punkterad omgivning av $t = 0$. Detta ger att gränsvärdet som vi skulle undersöka blir

$$\sqrt{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{g(t)} - 1}{g(t)} \frac{g(t)}{t} = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - \ln 2}{4}.$$

Svar: $\frac{1 - \ln 2}{2\sqrt{2}}.$

Alternativ lösning: Känn igen gränsvärdet (efter bytet $x = 1/t$) som definitionen av en derivata, nämligen

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2+t)^{1/(2+t)} - \sqrt{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_+(0),$$

där

$$f(t) = (2+t)^{1/(2+t)} \quad (t > -2).$$

Vanliga deriveringsregler ger

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln f(t) = \frac{d}{dt} \frac{\ln(2+t)}{2+t} = \frac{\frac{1}{2+t} \cdot (2+t) - \ln(2+t) \cdot 1}{(2+t)^2} = \frac{1 - \ln(2+t)}{(2+t)^2},$$

varefter insättning av $t = 0$ ger svaret

$$f'(0) = f(0) \cdot \frac{1 - \ln(2+0)}{(2+0)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \ln(2)}{4}.$$