Lösningsskisser för TATA41 2018-06-04

1. (a) $\int \frac{(x+4)dx}{(x-2)(x+1)} = \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln|x-2| - \ln|x+1| + C.$

   (b) $\int x\arctan(x^2)dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}x^2\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$

   (c) Med $t = \cos x$ fås $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin x\,dx = -\int(1-t^2)t^2dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$. Eller med produkt-till-summma-omskrivning: $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}\int(2\sin x + \sin 3x - \sin 5x)dx = -\frac{1}{16}(2\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x) + C.$

   Svar: Se ovan.

2. (a) $\frac{x^3-2x^2-4x+3}{2x^2-3x-9}dx = \frac{(x-3)(x^2+x-1)}{(x-3)(2x+3)} = \frac{x^2+x-1}{2x+3} \to \frac{9+3-1}{6+3} = \frac{11}{9}$ då $x \to 3$.

   (b) $\frac{\sin(\sin x)}{e^{2x}-1} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{1}{2} \to 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) $\frac{3^{4x}+2^{5x}}{4^{3x}+5^{2x}} = \frac{81^x+32^x}{64^x+25^x} = (\frac{81}{64})^x\cdot\frac{1+(\frac{32}{81})^x}{1+(\frac{25}{64})^x} \to \infty$ då $x \to \infty$; första faktorn går ju mot ∞ (eftersom $\frac{81}{64} > 1$) och andra faktorn mot $\frac{1+0}{1+0} = 1$ (eftersom $-1 < \frac{32}{81} < 1$ och $-1 < \frac{25}{64} < 1$).

   Svar: (a) $11/9$ (b) $1/2$ (c) ∞.

3. Om ekvationen skrivs som $e^{\frac{\ln x}{x}} = k$ så syns omedelbart att den saknar lösning ifall $k \leq 0$. För $k > 0$ är den ekvivalent med

$$\frac{\ln x}{x} = \ln k, \qquad x > 0.$$

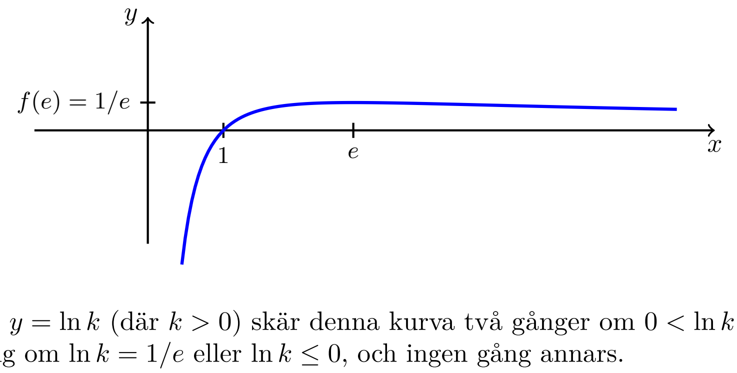
Antalet lösningar kan därmed utläsas från grafen för $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Vi har $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärde) och

$$f(x) = \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty} \to -\infty \qquad \text{då } x \to 0^+.$$

Derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln x\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

är positiv för $0 < x < e$ och negativ för $x > e$. Graf, alltså:



Linjen $y = \ln k$ (där $k > 0$) skär denna kurva två gånger om $0 < \ln k < 1/e$, en gång om $\ln k = 1/e$ eller $\ln k \leq 0$, och ingen gång annars.

Svar: Ekvationen $x^{1/x} = k$ har två lösningar om $1 < k < e^{1/e}$, en lösning om $k = e^{1/e}$ eller $0 < k \leq 1$, och inga lösningar annars.

(Anm: Det går förstås också bra att direkt undersöka funktionen $g(x) = x^{1/x}$ istället för att logaritmera.)

4. Låt x vara sidlängden för bottenkvadraten; då blir lådans höjd $\frac{1}{2}(L-x)$, så volymen är

$$V(x) = \tfrac{1}{2}x^2(L-x), \qquad 0 < x < L.$$

Derivatan

$$V'(x) = x(L-x) + \tfrac{1}{2}x^2(-1) = x(L - \tfrac{3}{2}x)$$

är positiv för $0 < x < 2L/3$ och negativ för $2L/3 < x < L$, så $V(2L/3) = 2L^3/27$ är den maximala volymen.

Svar: $\frac{2}{27}L^3$.

(Notera att svaret av dimensionsskäl måste bli en konstant gånger L^3; allt annat vore orimligt.)

5. Vi beräknar först

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{a+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2} \right) dx \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} \arctan(ax) \right]_0^\omega \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} \right), \qquad a > 0. \end{aligned}$$

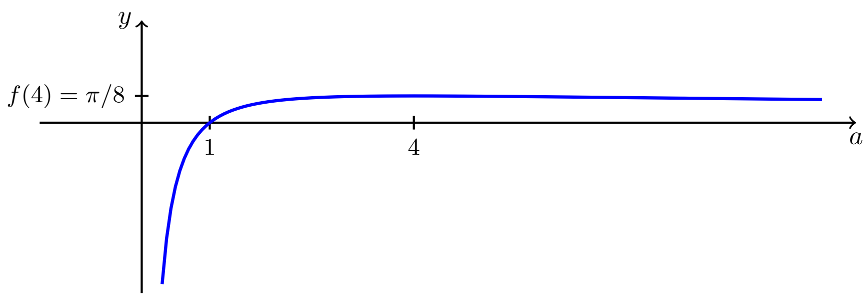
Sedan undersöker vi denna funktion. Gränsvärden: $f(a) \to \frac{\pi}{2}(0-0) = 0$ då $a \to \infty$ och

$$f(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(\sqrt{a}-1)}_{\to -1} \to -\infty \qquad \text{då } a \to 0^+.$$

Och från derivatan

$$f'(a) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{-1}{2a\sqrt{a}} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{\pi(2-\sqrt{a})}{4a^2}$$

ser man att f är strängt växande på intervallet $0 < a \le 4$ och strängt avtagande på intervallet $a \ge 4$. Grafen $y = f(a)$ får alltså följande utseende:



Svar: Lokalt (och globalt) maximum $f(4) = \pi/8$, vågrät asymptot $y = 0$ (då $a \to \infty$), samt lodrät asymptot $a = 0$.

6. Se kurslitteraturen.

7. Lösningen blir enklare ifall man känner till Riemannsummor; då ser man att

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n\sqrt{n(k+n)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\tfrac{k}{n})$$

är en Riemannsumma för $f(x) = x/\sqrt{x+1}$ på intervallet $0 \leq x \leq 2$, och alltså konvergerar mot

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \cdots = \Big[\tfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\Big]_0^2 = \frac{4}{3}$$

då $n \to \infty$.

Annars får man över- och underskatta. Omskrivningen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{-1}{\sqrt{x+1}}$$

visar att f är strängt växande (ty summa av två strängt växande funktioner). Därmed ser man i lämpliga figurer att den givna summan, kalla den s_n, är en övertrappsumma för $\int_0^2 f(x)\,dx$, och att samma summa med den sista termen borttagen är en undertrappsumma. Detta ger

$$s_n - \tfrac{1}{n}f(2) < \tfrac{4}{3} < s_n \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{4}{3} < s_n < \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{n}f(2),$$

varpå instängningsregeln visar att $s_n \to 4/3$ då $n \to \infty$.

Svar: 4/3.