Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

# Tentamen i Envariabelanalys 1

**2018-06-04 kl. 14.00–19.00**

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg $n$ räcker $4(n-1)$ poäng och $n$ godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna de obestämda integralerna

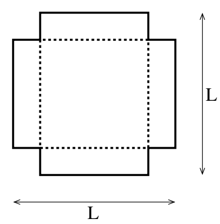
   (a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-x-2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int x \arctan x^2\,dx$ (c) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx.$

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{2x^2-3x-9}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{e^{2x}-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3^{4x}+2^{5x}}{4^{3x}+5^{2x}}.$

3. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $x^{1/x} = k$, $x > 0$, för varje reellt värde på konstanten $k$.

4. En låda (utan lock) konstrueras genom att man klipper bort fyra lika stora kvadrater från hörnen på en kvadrat med sidlängd $L$ och sedan viker upp kanterna vid de streckade linjerna enligt figuren. Hur stor volym kan lådan få? (Motivera noga att volymen blir maximal.)




5. Skissa grafen till funktionen $f(a) = \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{a+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2}\right) dx$, $a > 0$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

6. (a) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

   (b) Definiera vad som menas med att en funktion är strängt växande.

   (c) Använd medelvärdessatsen för att visa att $f$ är strängt växande på ett intervall $I$ om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$.

7. Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n\sqrt{n(k+n)}}.$

## Lösningsskisser för TATA41 2018-06-04

1. (a) $\int \frac{(x+4)dx}{(x-2)(x+1)} = \int \left( \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2\ln|x-2| - \ln|x+1| + C.$

   (b) $\int x \arctan(x^2) dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}x^2\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$

   (c) Med $t = \cos x$ fås $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x\, dx = -\int (1-t^2)t^2 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$. Eller med produkt-till-summma-omskrivning: $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x + \sin 3x - \sin 5x) dx = -\frac{1}{16}(2\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x) + C.$

   **Svar:** Se ovan.

2. (a) $\frac{x^3-2x^2-4x+3}{2x^2-3x-9}dx = \frac{(x-3)(x^2+x-1)}{(x-3)(2x+3)} = \frac{x^2+x-1}{2x+3} \to \frac{9+3-1}{6+3} = \frac{11}{9}$ då $x \to 3$.

   (b) $\frac{\sin(\sin x)}{e^{2x}-1} = \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{1}{2} \to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) $\frac{3^{4x}+2^{5x}}{4^{3x}+5^{2x}} = \frac{81^x+32^x}{64^x+25^x} = (\frac{81}{64})^x \cdot \frac{1+(\frac{32}{81})^x}{1+(\frac{25}{64})^x} \to \infty$ då $x \to \infty$; första faktorn går ju mot $\infty$ (eftersom $\frac{81}{64} > 1$) och andra faktorn mot $\frac{1+0}{1+0} = 1$ (eftersom $-1 < \frac{32}{81} < 1$ och $-1 < \frac{25}{64} < 1$).

   **Svar:** (a) 11/9 (b) 1/2 (c) $\infty$.

3. Om ekvationen skrivs som $e^{\frac{\ln x}{x}} = k$ så syns omedelbart att den saknar lösning ifall $k \le 0$. För $k > 0$ är den ekvivalent med

$$\frac{\ln x}{x} = \ln k, \qquad x > 0.$$

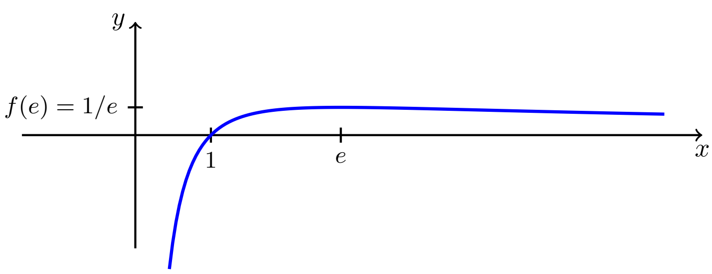
Antalet lösningar kan därmed utläsas från grafen för $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Vi har $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärde) och

$$f(x) = \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty} \to -\infty \qquad \text{då } x \to 0^+.$$

Derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

är positiv för $0 < x < e$ och negativ för $x > e$. Graf, alltså:




Linjen $y = \ln k$ (där $k > 0$) skär denna kurva två gånger om $0 < \ln k < 1/e$, en gång om $\ln k = 1/e$ eller $\ln k \le 0$, och ingen gång annars.

**Svar:** Ekvationen $x^{1/x} = k$ har två lösningar om $1 < k < e^{1/e}$, en lösning om $k = e^{1/e}$ eller $0 < k \le 1$, och inga lösningar annars.

(Anm: Det går förstås också bra att direkt undersöka funktionen $g(x) = x^{1/x}$ istället för att logaritmera.)

4. Låt $x$ vara sidlängden för bottenkvadraten; då blir lådans höjd $\frac{1}{2}(L-x)$, så volymen är

$$V(x) = \tfrac{1}{2}x^2(L-x), \qquad 0 < x < L.$$

Derivatan

$$V'(x) = x(L-x) + \tfrac{1}{2}x^2(-1) = x(L - \tfrac{3}{2}x)$$

är positiv för $0 < x < 2L/3$ och negativ för $2L/3 < x < L$, så $V(2L/3) = 2L^3/27$ är den maximala volymen.

**Svar:** $\frac{2}{27}L^3$.

(Notera att svaret av dimensionsskäl måste bli en konstant gånger $L^3$; allt annat vore orimligt.)

5. Vi beräknar först

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{a+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2} \right) dx \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} \arctan(ax) \right]_0^\omega \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{a} \right), \qquad a > 0. \end{aligned}$$

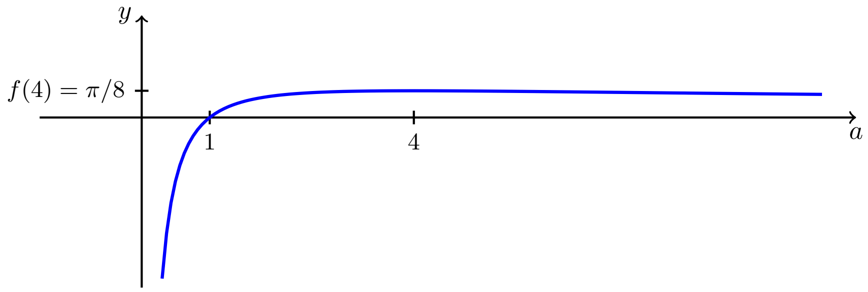
Sedan undersöker vi denna funktion. Gränsvärden: $f(a) \to \frac{\pi}{2}(0-0) = 0$ då $a \to \infty$ och

$$f(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(\sqrt{a}-1)}_{\to -1} \to -\infty \qquad \text{då } a \to 0^+.$$

Och från derivatan

$$f'(a) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{-1}{2a\sqrt{a}} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{\pi(2-\sqrt{a})}{4a^2}$$

ser man att $f$ är strängt växande på intervallet $0 < a \leq 4$ och strängt avtagande på intervallet $a \geq 4$. Grafen $y = f(a)$ får alltså följande utseende:




**Svar:** Lokalt (och globalt) maximum $f(4) = \pi/8$, vågrät asymptot $y = 0$ (då $a \to \infty$), samt lodrät asymptot $a = 0$.

6. Se kurslitteraturen.

7. Lösningen blir enklare ifall man känner till Riemannsummor; då ser man att

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n\sqrt{n(k+n)}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f(\tfrac{k}{n})$$

är en Riemannsumma för $f(x) = x/\sqrt{x+1}$ på intervallet $0 \le x \le 2$, och alltså konvergerar mot

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \cdots = \Big[\tfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\Big]_0^2 = \frac{4}{3}$$

då $n \to \infty$.

Annars får man över- och underskatta. Omskrivningen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{-1}{\sqrt{x+1}}$$

visar att $f$ är strängt växande (ty summa av två strängt växande funktioner). Därmed ser man i lämpliga figurer att den givna summan, kalla den $s_n$, är en övertrappsumma för $\int_0^2 f(x)\,dx$, och att samma summa med den sista termen borttagen är en undertrappsumma. Detta ger

$$s_n - \tfrac{1}{n}f(2) < \tfrac{4}{3} < s_n \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{4}{3} < s_n < \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{n}f(2),$$

varpå instängningsregeln visar att $s_n \to 4/3$ då $n \to \infty$.

**Svar:** 4/3.