Lösningsskisser för TATA41 2018-04-04

1. Funktionen $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ är definierad för alla $x \neq 0$, och uppfyller

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(x^3 + 3x - 1)}_{\to -1} \to -\infty \quad \text{då } x \to 0,$$

så linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot. (Obs. att eftersom exponenten 2 är *jämn* så gäller $1/x^2 \to \infty$ både då $x \to 0^+$ och då $x \to 0^-$.)

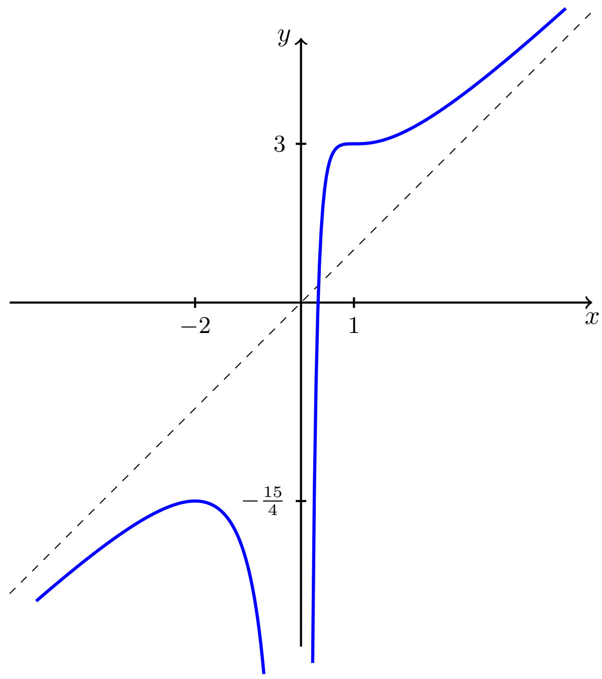
Det är uppenbart att $f(x) < 0$ för $x < 0$, så att eventuella nollställen måste inträffa för $x > 0$. Från derivatan

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$$

fås teckentabellen

x		-2		0		1	
$(x-1)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^3	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$

Man ser lätt att $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$, eftersom termen x gör så medan de andra två termerna går mot noll. (Detta medför för övrigt att $f(x) - x \to 0$, dvs. linjen $y = x$ är en sned asymptot.)



Svar: Lokalt maximum $f(-2) = -15/4$. Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot. (Lokala minima saknas, liksom vågräta asymptoter.)

2. (a) Direkt insättning ger $\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-3} \to \frac{4+6-10}{4+4-3} = \frac{0}{5} = 0$ då $x \to 2$.

(b) Med $t = -x$ (som vi kan anta är positivt, eftersom vi ska låta $x \to -\infty$) fås $x+\sqrt{x^2-3x} = -t+\sqrt{t^2+3t} = \frac{(t^2+3t)-t^2}{\sqrt{t^2+3t}+t} = [\text{för } t > 0] = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1} \to \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$ då $t \to \infty$, dvs. då $x \to -\infty$.

(c) Standardgränsvärden ger

$$\frac{1}{\sin x} + \ln x = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} + \underbrace{x \ln x}_{\to 0}\Bigg) \to \infty \quad \text{då } x \to 0^+.$$

Svar: (a) 0 (b) 3/2 (c) ∞.

3. (a) Variabelbytet $t = 1+x^2$ (och därmed $dt = 2x\,dx$) ger $\int x \ln(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln t\,dt = \frac{1}{2}(t\ln t - t) + D = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$ (där $C = D - \frac{1}{2}$).

(b) Med $t = 2x$ fås $\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^3 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 t)\cos t\,dt = \frac{1}{2}(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t) + C = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$.

(c) Efter kvadratkomplettering ser man att det är lämpligt att sätta $t = x-1$: $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\sqrt{1-t^2} + \arcsin t + C = \arcsin(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + C$.

Svar: Se ovan.

4. Vi bestämmer primitiv funktion med partialbråksuppdelning:

$$\int \frac{5x}{x^3-x^2+4x-4}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+4}{x^2+4}\right) dx$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 2\arctan(x/2) + C.$$

Detta ger

$$\int_3^\omega \frac{4x}{x^3-x^2+4x-4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{(1-\frac{1}{\omega})^2}{1+\frac{4}{\omega^2}} + 2\arctan\frac{\omega}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 13 - 2\arctan\frac{3}{2}$$
$$\to 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 13 - 2\arctan\frac{3}{2} \quad \text{då } \omega \to \infty.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{4} + 2(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{3}{2})$.

(Detta kan även skrivas som $\frac{1}{2}\ln\frac{13}{4} + 2\arctan\frac{2}{3}$, vilket inses genom att rita en rätvinklig triangel med kateterna 2 och 3. Som rimlighetskontroll kan man notera att svaret är positivt, vilket det måste vara eftersom integranden $\frac{5x}{(x-1)(x^2+4)}$ är positiv på integrationsintervallet $x \geq 3$.)

5. (ab) Se kurslitteraturen.

(c) Huvudsatsen och kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^5 \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt = -\frac{d}{dx}\int_5^{x^3} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt = -\frac{\sin(x^3)}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2 = -\frac{3x^2\sin(x^3)}{1+x^6}.$$

6. Sätt $f(x) = \sin x - (x - \frac{1}{6}x^3)$, för $x \in \mathbf{R}$. Vi vill veta när $f(x) \geq 0$. Derivering ger $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ och $f''(x) = -\sin x + x$. Olikheten $\sin x < x$ för $x > 0$ är känd från grundkursen, och för $x < 0$ blir den omvänd eftersom båda leden är udda funktioner. Detta ger oss tecknet för $f''(x)$ (och om man inte kände till ovanstående olikhet så hade man kunnat visa den med ytterligare en derivering). Alltså:

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Och eftersom $f'(0) = 0$ så får vi från detta även följande:

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	terrass-punkt	$\nearrow$

Värdet i terrasspunkten är $f(0) = 0$, så detta visar att olikheten $f(x) \geq 0$ gäller om och endast om $x \geq 0$.

Svar: $x \geq 0$.

7. Från

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1} = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \left(\frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + C,\end{aligned}$$

och alltså

$$\int_0^\infty \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{x-3}{x^2+1} + \arctan x\right]_0^\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}.$$

Svar: $(\pi + 6)/4$.