

## Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-04-04 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg  $n$  räcker  $4(n-1)$  poäng och  $n$  godkända uppgifter ( $n = 3, 4, 5$ ). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 3x}) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sin x} + \ln x \right)$$

3. Beräkna de primitiva funktionerna:

$$(a) \int x \ln(1 + x^2) dx \quad (b) \int \cos^3 2x dx \quad (c) \int \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

4. Beräkna  $\int_3^\infty \frac{5x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$  (eller visa divergens).

5. (a) Definiera vad som menas med att  $f$  är deriverbar i punkten  $a$ .

(b) Formulera analysens huvudsats.

(c) Beräkna  $\frac{d}{dx} \int_{x^3}^5 \frac{\sin t}{1 + t^2} dt$ .

6. För vilka  $x \in \mathbf{R}$  gäller olikheten  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ ?

7. Beräkna  $\int_0^\infty \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$  (eller visa divergens).

# Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-04-04 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg G krävs minst 8 poäng och minst 3 godkända uppgifter. För betyg VG krävs minst 14 poäng och minst 5 godkända uppgifter. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för

$$f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 3} \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 3x}) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\sin x} + \ln x \right)$$

3. Beräkna de primitiva funktionerna:

$$(a) \int x \ln(1 + x^2) dx \quad (b) \int \cos^3 2x dx \quad (c) \int \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

4. Beräkna  $\int_3^{\infty} \frac{5x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx$  (eller visa divergens).

5. (a) Definiera vad som menas med att  $f$  är deriverbar i punkten  $a$ .

(b) Formulera analysens huvudsats.

(c) Beräkna  $\frac{d}{dx} \int_{x^3}^5 \frac{\sin t}{1 + t^2} dt$ .

6. För vilka  $x \in \mathbf{R}$  gäller olikheten  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ ?

7. Beräkna  $\int_0^{\infty} \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$  (eller visa divergens).

## Lösningsskisser för TATA41 2018-04-04

1. Funktionen  $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$  är definierad för alla  $x \neq 0$ , och uppfyller

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{(x^3 + 3x - 1)}_{\rightarrow -1} \rightarrow -\infty \quad \text{då } x \rightarrow 0,$$

så linjen  $x = 0$  är en lodrät asymptot. (Obs. att eftersom exponenten 2 är *jämn* så gäller  $1/x^2 \rightarrow \infty$  både då  $x \rightarrow 0^+$  och då  $x \rightarrow 0^-$ .)

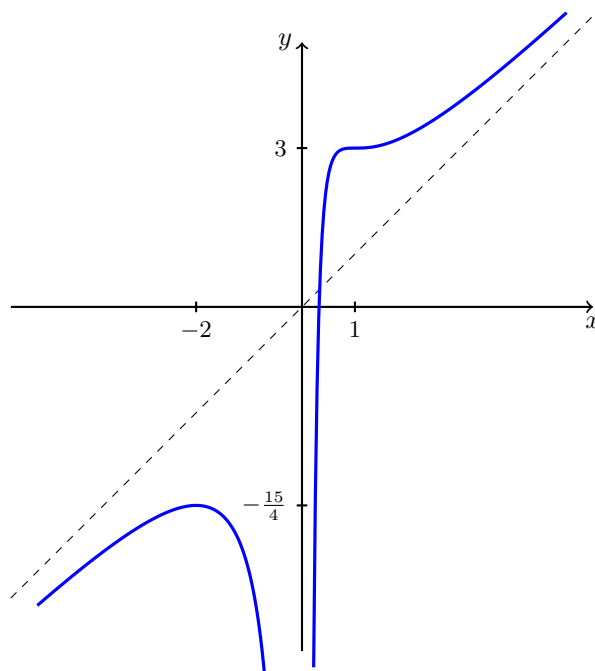
Det är uppenbart att  $f(x) < 0$  för  $x < 0$ , så att eventuella nollställen måste inträffa för  $x > 0$ . Från derivatan

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$$

fås teckentabellen

$x$	-2	0	1		
$(x-1)^2$	+	+	+	0	
$x+2$	-	0	+	+	
$x^3$	-	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	ej def.	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	ej def.	↗
				terrasspunkt	↗

Man ser lätt att  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  då  $x \rightarrow \pm\infty$ , eftersom termen  $x$  gör så medan de andra två termerna går mot noll. (Detta medför för övrigt att  $f(x) - x \rightarrow 0$ , dvs. linjen  $y = x$  är en sned asymptot.)



**Svar:** Lokalt maximum  $f(-2) = -15/4$ . Linjen  $x = 0$  är en lodrät asymptot. (Lokala minima saknas, liksom vågräta asymptoter.)

2. (a) Direkt insättning ger  $\frac{x^2+3x-10}{x^2+2x-3} \rightarrow \frac{4+6-10}{4+4-3} = \frac{0}{5} = 0$  då  $x \rightarrow 2$ .  
 (b) Med  $t = -x$  (som vi kan anta är positivt, eftersom vi ska låta  $x \rightarrow -\infty$ ) fås  $x + \sqrt{x^2 - 3x} = -t + \sqrt{t^2 + 3t} = \frac{(t^2+3t)-t^2}{\sqrt{t^2+3t}+t} = [\text{för } t > 0] = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{2}$  då  $t \rightarrow \infty$ , dvs. då  $x \rightarrow -\infty$ .  
 (c) Standardgränsvärden ger

$$\frac{1}{\sin x} + \ln x = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow \infty} \left( \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{x \ln x}_{\rightarrow 0} \right) \rightarrow \infty \quad \text{då } x \rightarrow 0^+.$$

**Svar:** (a) 0 (b) 3/2 (c)  $\infty$ .

3. (a) Variabelbytet  $t = 1 + x^2$  (och därmed  $dt = 2x dx$ ) ger  $\int x \ln(1 + x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln t dt = \frac{1}{2}(t \ln t - t) + D = \frac{1}{2}(1 + x^2) \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$  (där  $C = D - \frac{1}{2}$ ).  
 (b) Med  $t = 2x$  fås  $\int \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos^3 t dt = \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \frac{1}{2}(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t) + C = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C$ .  
 (c) Efter kvadratkomplettering ser man att det är lämpligt att sätta  $t = x - 1$ :  
 $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\sqrt{1-t^2} + \arcsin t + C = \arcsin(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + C$ .

**Svar:** Se ovan.

4. Vi bestämmer primitiv funktion med partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx &= \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{-x+4}{x^2+4} \right) dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \arctan(x/2) + C. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \int_3^\omega \frac{4x}{x^3 - x^2 + 4x - 4} dx &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \frac{1}{\omega})^2}{1 + \frac{4}{\omega^2}} + 2 \arctan \frac{\omega}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 13 - 2 \arctan \frac{3}{2} \\ &\rightarrow 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 13 - 2 \arctan \frac{3}{2} \quad \text{då } \omega \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Svar:** Integralen är konvergent, med värdet  $\frac{1}{2} \ln \frac{13}{4} + 2(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{3}{2})$ .

(Detta kan även skrivas som  $\frac{1}{2} \ln \frac{13}{4} + 2 \arctan \frac{2}{3}$ , vilket inses genom att rita en rätvinklig triangel med kateterna 2 och 3. Som rimlighetskontroll kan man notera att svaret är positivt, vilket det måste vara eftersom integranden  $\frac{5x}{(x-1)(x^2+4)}$  är positiv på integrationsintervallet  $x \geq 3$ .)

5. (ab) Se kurslitteraturen.  
 (c) Huvudsatsen och kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx} \int_{x^3}^5 \frac{\sin t}{1+t^2} dt = -\frac{d}{dx} \int_5^{x^3} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = -\frac{\sin(x^3)}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = -\frac{3x^2 \sin(x^3)}{1+x^6}.$$

6. Sätt  $f(x) = \sin x - (x - \frac{1}{6}x^3)$ , för  $x \in \mathbf{R}$ . Vi vill veta när  $f(x) \geq 0$ . Derivering ger  $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$  och  $f''(x) = -\sin x + x$ . Olikheten  $\sin x < x$  för  $x > 0$  är känd från grundkursen, och för  $x < 0$  blir den omvänd eftersom båda leden är udda funktioner. Detta ger oss tecknet för  $f''(x)$  (och om man inte kände till ovanstående olikhet så hade man kunnat visa den med ytterligare en derivering). Alltså:

$x$	0
$f''(x)$	-   0   +
$f'(x)$	$\searrow$ lok. min. $\nearrow$

Och eftersom  $f'(0) = 0$  så får vi från detta även följande:

$x$	0
$f'(x)$	+   0   +
$f(x)$	$\nearrow$ terrasspunkt $\nearrow$

Värdet i terrasspunkten är  $f(0) = 0$ , så detta visar att olikheten  $f(x) \geq 0$  gäller om och endast om  $x \geq 0$ .

**Svar:**  $x \geq 0$ .

7. Från

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan x + C, \end{aligned}$$

och alltså

$$\int_0^\infty \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{x - 3}{x^2 + 1} + \arctan x \right]_0^\omega = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}.$$

**Svar:**  $(\pi + 6)/4$ .