

Lösningsskisser för TATA41 2018-03-15

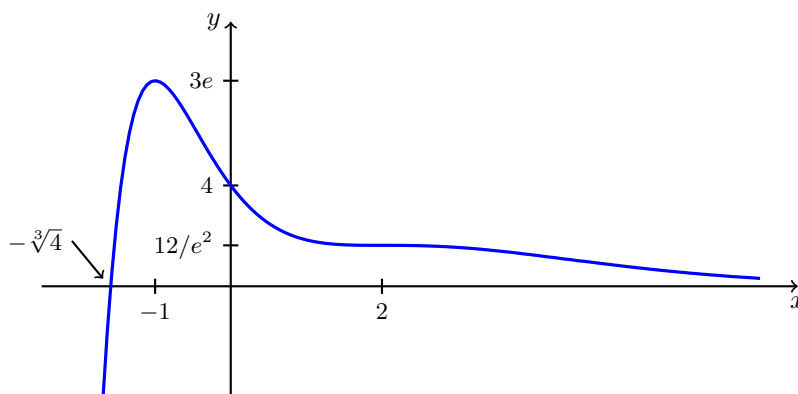
1. Funktionen $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$ är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$. Den har exakt ett nollställe, nämligen $x = -\sqrt[3]{4}$, där den byter tecken från negativ till positiv. Derivatans är

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + (x^3 + 4)(-e^{-x}) = -(x^3 - 3x^2 + 4)e^{-x} = -(x+1)(x-2)^2 e^{-x},$$

vilket ger teckentabellen

x	-1		2		
$-e^{-x}$	-	-	-	-	
$x+1$	-	0	+	+	
$(x-2)^2$	+	+	0	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow	terrasspunkt	\searrow

Att $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$ är tämligen uppenbart, eftersom $x^3 + 4 \rightarrow -\infty$ och $e^{-x} \rightarrow \infty$, och standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k/e^x = 0$ visar att $f(x) = x^3/e^x + 4/e^x \rightarrow 0 + 0 = 0$ då $x \rightarrow \infty$, så att linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot.



Svar: Lokalt maximum $f(-1) = 3e$. Linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot (då $x \rightarrow \infty$). (Lokala minima och lodräta asymptoter saknas.)

2. (a) $\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \rightarrow \frac{4+4+4}{2+2} = 3$ då $x \rightarrow 2$.
- (b) Med $x = 1+t$ fås $\frac{\ln x}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{\ln(1+t)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2})} = \frac{\ln(1+t)}{-\sin(\frac{\pi t}{2})} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \rightarrow -\frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{\pi}$ då $t \rightarrow 0$ (dvs. $x \rightarrow 1$), enligt standardgränsvärden.
- (c) $\frac{x+\ln(1+2^x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\ln 2^x + \ln(2^{-x}+1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}} = [\text{för } x > 0] = \frac{x+x \ln 2 + \ln(2^{-x}+1)}{x\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{1+\ln 2 + \frac{1}{x} \ln(2^{-x}+1)}{\sqrt{1+1/x^2}} \rightarrow \frac{1+\ln 2 + 0 \cdot \ln(0+1)}{\sqrt{1+0}} = 1 + \ln 2$ då $x \rightarrow \infty$.

Svar: (a) 3 (b) $-2/\pi$ (c) $1 + \ln 2$.

3. (a) $\int \frac{x^2+2x+6}{x^2} dx = \int (1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}) dx = x + 2 \ln|x| - \frac{6}{x} + C$.
- (b) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+6} dx = \int (1 + \frac{-2x-6}{x^2+2x+6}) dx = x - \int \frac{2(x+1)+4}{(x+1)^2+5} dx = x - \ln(x^2 + 2x + 6) - \frac{4}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$.
- (c) Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ följt av partiell integration ger $\int \cos \sqrt{x} dx = \int 2t \cos t dt = 2t \sin t - \int 2 \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$.

Svar: Se ovan.

4. Sätt $f(x) = 2 \ln x - \arctan 3x - \ln(1 + 9x^2)$, för $x > 0$. Derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1 + (3x)^2} - \frac{18x}{1 + 9x^2} = \frac{2(1 + 9x^2) - x(3 + 18x)}{x(1 + 9x^2)} = \frac{2 - 3x}{x(1 + 9x^2)}$$

är positiv för $0 < x < 2/3$ och negativ för $x > 2/3$, vilket ger ett maximum

$$f(2/3) = 2 \ln \frac{2}{3} - \arctan 2 - \ln(5) = \underbrace{-\ln \frac{45}{4} - \arctan 2}_{=A}.$$

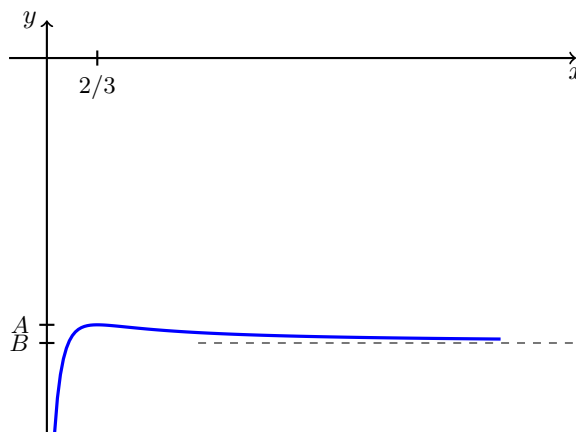
(Det spelar egentligen ingen roll för svaret, men för grafritandets skull kan man notera att $A < 0$.)

Gränsvärden: $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 0^+$ (uppenbart) och

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{x^2}{1 + 9x^2} - \arctan 3x \\ &= \ln \frac{1}{x^{-2} + 9} - \arctan 3x \rightarrow \underbrace{-\ln 9 - \frac{\pi}{2}}_{=B} \quad \text{då } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(Eftersom $f'(x) < 0$ för $x > 2/3$ så är $B < A$.)

Vi kan nu läsa av antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = k$ från grafen $y = f(x)$, som ser ut såhär (om man ritat den skalenligt med hjälp av dator; värdena är $A \approx -3,53$, $B \approx -3,77$):



Svar: Låt $A = -\ln \frac{45}{4} - \arctan 2$ och $B = -\ln 9 - \frac{\pi}{2}$. Ekvationen saknar lösning om $k > A$, har en lösning om $k = A$ eller $k \leq B$, och har två lösningar om $B < k < A$.

5. (a) $\int_{-1}^3 |x^2 - 4| dx = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$.
- (b) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{4} \int_2^3 \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{4} \left[\ln|x-5| - \ln|x-1| \right]_2^3 = \frac{1}{4} ((\ln 2 - \ln 2) - (\ln 3 - \ln 1)) = -\frac{1}{4} \ln 3$.
- (c) Integranden $f(x)$ är en **udda** funktion:

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{\ln(2 + (-x)^2)} = \frac{-\arctan x}{\ln(2 + x^2)} = -f(x).$$

Den är kontinuerlig på \mathbf{R} , och därmed integrerbar på varje begränsat intervall. Integrationsintervallet $[-2, 2]$ är begränsat och ligger symmetriskt kring origo. Integralen blir därmed **noll**.

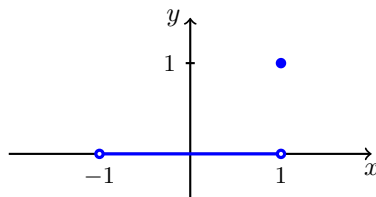
Svar: Se ovan.

Som rimlighetskontroll kan man notera att svaret i (a) måste bli **positivt**, eftersom $|x^2 - 4| > 0$ förutom i enstaka punkter, och att svaret i (b) måste bli **negativt**, eftersom $\frac{1}{(x-1)(x-5)} < 0$ då $2 \leq x \leq 3$.

6. (a) Se läroboken.
- (b) Funktionen f är definierad för $-1 < x \leq 1$, och ges av

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(Ifall $x \leq -1$ så saknar x^n gränsvärde då $n \rightarrow \infty$, och om $x > 1$ fås $x^n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$.)



Detta är ej en kontinuerlig funktion; den är ju diskontinuerlig i punkten 1, eftersom gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

inte överensstämmer med värdet $f(1) = 1$.

7. Derivering av $f(x) = 16x^5 + 20x^2 + 15x + 1$ ger $f'(x) = 80x^4 + 40x + 15$ och $f''(x) = 40(8x^3 + 1)$. Eftersom $f''(x) < 0$ för $x < -1/2$ och $f''(x) > 0$ för $x > -1/2$ så har f' ett strängt minimum då $x = -1/2$. Insättning ger $f'(-1/2) = 0$, och eftersom detta är minimivärdet så gäller $f'(x) > 0$ för $x \neq -1/2$. Detta visar att f är strängt växande på \mathbf{R} (med en terrasspunkt då $x = -1/2$), och därmed är f inverterbar, vilket skulle visas.

(Alternativt kan man med gissning av rötter hitta faktoriseringen $f'(x) = 5(2x + 1)^2(4x^2 - 4x + 3)$ och därur se att $f'(x) > 0$ för $x \neq -1/2$.)

Formeln för inversens derivata, ” $\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$ ”, ger

$$(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{15}.$$