Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-03-15 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = (x^3 + 4)e^{-x}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos(\pi x/2)} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x + \ln(1 + 2^x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

3. Beräkna nedanstående primitiva funktioner:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{x^2 + 2x + 6}{x^2}\, dx \qquad \text{(b)} \quad \int \frac{x^2}{x^2 + 2x + 6}\, dx \qquad \text{(c)} \quad \int \cos\sqrt{x}\, dx$$

4. Hur många rella lösningar har ekvationen $2\ln x - \arctan 3x - \ln(1 + 9x^2) = k$ för olika värden på parametern $k \in \mathbf{R}$?

5. Beräkna integralerna:

$$\text{(a)} \quad \int_{-1}^{3} \left|x^2 - 4\right| dx \qquad \text{(b)} \quad \int_{2}^{3} \frac{dx}{(x-1)(x-5)} \qquad \text{(c)} \quad \int_{-2}^{2} \frac{\arctan x}{\ln(2 + x^2)}\, dx$$

6. (a) Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i punkten a.

   (b) Sätt $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$, för alla $x \in \mathbf{R}$ sådana att gränsvärdet existerar ändligt. Rita grafen $y = f(x)$ och avgör om f är kontinuerlig.

7. Visa att funktionen $f(x) = 16x^5 + 20x^2 + 15x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$) är inverterbar, och bestäm $(f^{-1})'(1)$.

Lösningsskisser för TATA41 2018-03-15

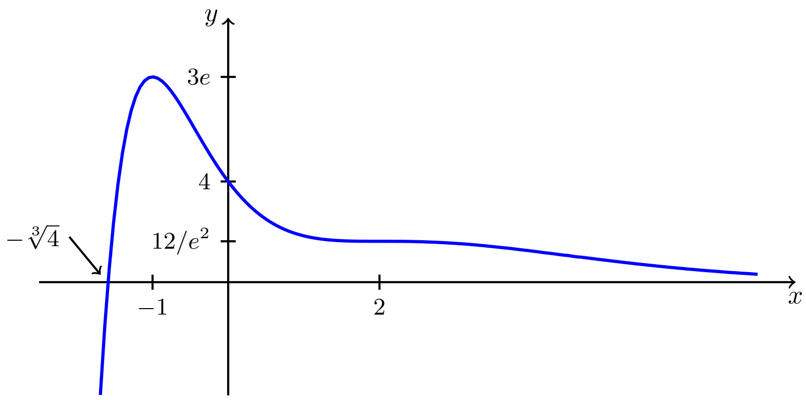
1. Funktionen $f(x) = (x^3+4)e^{-x}$ är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$. Den har exakt ett nollställe, nämligen $x = -\sqrt[3]{4}$, där den byter tecken från negativ till positiv. Derivatan är

   $$f'(x) = 3x^2e^{-x} + (x^3+4)(-e^{-x}) = -(x^3-3x^2+4)e^{-x} = -(x+1)(x-2)^2e^{-x},$$

   vilket ger teckentabellen

x		-1		2	
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	terrass-punkt	$\searrow$

   Att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ är tämligen uppenbart, eftersom $x^3+4 \to -\infty$ och $e^{-x} \to \infty$, och standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} x^k/e^x = 0$ visar att $f(x) = x^3/e^x + 4/e^x \to 0+0 = 0$ då $x \to \infty$, så att linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot.

   Svar: Lokalt maximum $f(-1) = 3e$. Linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot (då $x \to \infty$). (Lokala minima och lodräta asymptoter saknas.)

2. (a) $\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \to \frac{4+4+4}{2+2} = 3$ då $x \to 2$.

   (b) Med $x = 1+t$ fås $\frac{\ln x}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{\ln(1+t)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2})} = \frac{\ln(1+t)}{-\sin(\frac{\pi t}{2})} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \to -\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1 = -\frac{2}{\pi}$ då $t \to 0$ (dvs. $x \to 1$), enligt standardgränsvärden.

   (c) $\frac{x+\ln(1+2^x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\ln 2^x+\ln(2^{-x}+1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}} = [\text{för } x>0] = \frac{x+x\ln 2+\ln(2^{-x}+1)}{x\sqrt{1+1/x^2}}$ $= \frac{1+\ln 2+\frac{1}{x}\ln(2^{-x}+1)}{\sqrt{1+1/x^2}} \to \frac{1+\ln 2+0\cdot\ln(0+1)}{\sqrt{1+0}} = 1+\ln 2$ då $x \to \infty$.

   Svar: (a) 3 (b) $-2/\pi$ (c) $1+\ln 2$.

3. (a) $\int \frac{x^2+2x+6}{x^2}\,dx = \int (1+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2})\,dx = x + 2\ln|x| - \frac{6}{x} + C$.

   (b) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+6}\,dx = \int \left(1+\frac{-2x-6}{x^2+2x+6}\right)dx = x - \int \frac{2(x+1)+4}{(x+1)^2+5}\,dx$ $= x - \ln(x^2+2x+6) - \frac{4}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$.

   (c) Variabelbytet $t = \sqrt{x}$ följt av partiell integration ger $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \int 2t\cos t\,dt = 2t\sin t - \int 2\sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$.

   Svar: Se ovan.

4. Sätt $f(x) = 2\ln x - \arctan 3x - \ln(1+9x^2)$, för $x > 0$. Derivatan

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1+(3x)^2} - \frac{18x}{1+9x^2} = \frac{2(1+9x^2) - x(3+18x)}{x(1+9x^2)} = \frac{2-3x}{x(1+9x^2)}$$

är positiv för $0 < x < 2/3$ och negativ för $x > 2/3$, vilket ger ett maximum

$$f(2/3) = 2\ln\tfrac{2}{3} - \arctan 2 - \ln(5) = \underbrace{-\ln\tfrac{45}{4} - \arctan 2}_{=A}.$$

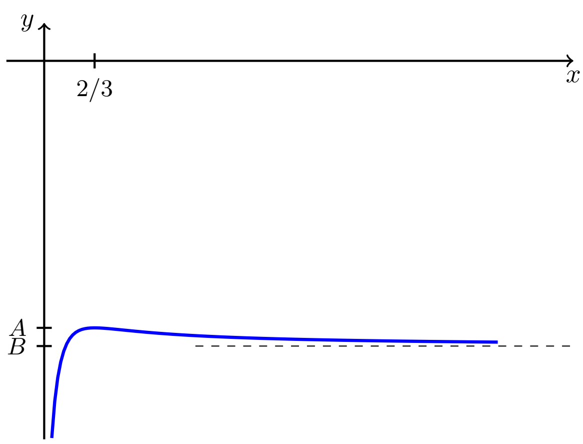
(Det spelar egentligen ingen roll för svaret, men för grafritandets skull kan man notera att $A < 0$.)

Gränsvärden: $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$ (uppenbart) och

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{x^2}{1+9x^2} - \arctan 3x \\ &= \ln\frac{1}{x^{-2}+9} - \arctan 3x \to \underbrace{-\ln 9 - \frac{\pi}{2}}_{=B} \quad \text{då } x \to \infty. \end{aligned}$$

(Eftersom $f'(x) < 0$ för $x > 2/3$ så är $B < A$.)

Vi kan nu läsa av antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = k$ från grafen $y = f(x)$, som ser ut såhär (om man ritar den skalenligt med hjälp av dator; värdena är $A \approx -3{,}53$, $B \approx -3{,}77$):



Svar: Låt $A = -\ln\frac{45}{4} - \arctan 2$ och $B = -\ln 9 - \frac{\pi}{2}$. Ekvationen saknar lösning om $k > A$, har en lösning om $k = A$ eller $k \leq B$, och har två lösningar om $B < k < A$.

5. (a) $\int_{-1}^{3} \left|x^2 - 4\right| dx = \int_{-1}^{2}(4 - x^2)dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 4)dx = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$.

   (b) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{4}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \frac{1}{4}\Big[\ln|x-5| - \ln|x-1|\Big]_2^3 = \frac{1}{4}\big((\ln 2 - \ln 2) - (\ln 3 - \ln 1)\big) = -\frac{1}{4}\ln 3$.

   (c) Integranden $f(x)$ är en **udda** funktion:

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{\ln(2 + (-x)^2)} = \frac{-\arctan x}{\ln(2 + x^2)} = -f(x).$$

   Den är kontinuerlig på $\mathbf{R}$, och därmed integrerbar på varje begränsat intervall. Integrationsintervallet $[-2, 2]$ är begränsat och ligger symmetriskt kring origo. Integralen blir därmed **noll**.

Svar: Se ovan.

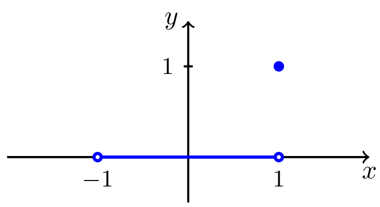
Som rimlighetskontroll kan man notera att svaret i (a) måste bli **positivt**, eftersom $\left|x^2 - 4\right| > 0$ förutom i enstaka punkter, och att svaret i (b) måste bli **negativt**, eftersom $\frac{1}{(x-1)(x-5)} < 0$ då $2 \le x \le 3$.

6. (a) Se läroboken.

   (b) Funktionen f är definierad för $-1 < x \le 1$, och ges av

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

   (Ifall $x \le -1$ så saknar x^n gränsvärde då $n \to \infty$, och om $x > 1$ fås $x^n \to \infty$ då $n \to \infty$.)



   Detta är ej en kontinuerlig funktion; den är ju diskontinuerlig i punkten 1, eftersom gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0$$

   inte överensstämmer med värdet $f(1) = 1$.

7. Derivering av $f(x) = 16x^5 + 20x^2 + 15x + 1$ ger $f'(x) = 80x^4 + 40x + 15$ och $f''(x) = 40(8x^3 + 1)$. Eftersom $f''(x) < 0$ för $x < -1/2$ och $f''(x) > 0$ för $x > -1/2$ så har f' ett strängt minimum då $x = -1/2$. Insättning ger $f'(-1/2) = 0$, och eftersom detta är minimivärdet så gäller $f'(x) > 0$ för $x \ne -1/2$. Detta visar att f är strängt växande på $\mathbf{R}$ (med en terrasspunkt då $x = -1/2$), och därmed är f inverterbar, vilket skulle visas.

   (Alternativt kan man med gissning av rötter hitta faktoriseringen $f'(x) = 5(2x + 1)^2(4x^2 - 4x + 3)$ och därur se att $f'(x) > 0$ för $x \ne -1/2$.)

   Formeln för inversens derivata, ”$\frac{dx}{dy} = 1/\frac{dy}{dx}$”, ger

$$(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{15}.$$