Lösningsskisser för TATA41 2018-01-13

1. Funktionen $f(x) = \exp(-x^2/4)/(x-3)$ är definierad för $x \neq 3$, och uppfyller uppenbart

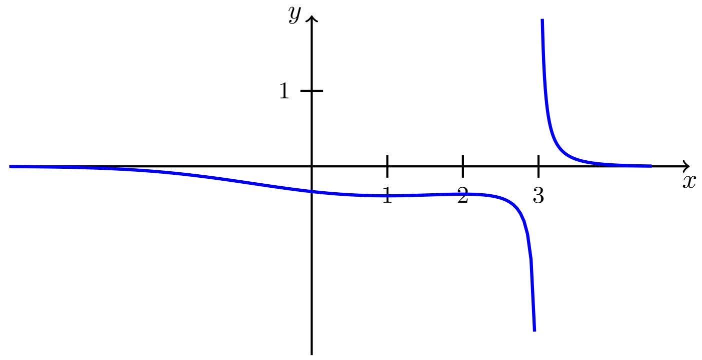
$$f(x) \to \pm\infty \quad \text{då} \quad x \to 3^{\pm}, \qquad f(x) \to 0 \quad \text{då} \quad x \to \pm\infty,$$

så linjen $x = 3$ är en lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot. Från derivatan

$$f'(x) = -\exp(-x^2/4)\,\frac{(x-1)(x-2)}{2(x-3)^2}$$

fås teckentabellen

x		1		2		3	
$-\exp(-x^2/4)$	$-$		$-$		$-$		$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$



Svar: Lokalt minimum $f(1) = -\frac{1}{2}e^{-1/4}$. Lokalt maximum $f(2) = -e^{-1}$. Asymptoter: $x = 3$ lodrät, $y = 0$ vågrät (då $x \to \pm\infty$).

2. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}
\int_3^\omega \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} &= \int_3^\omega \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-2) - \ln(x-1)\right]_3^\omega \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{\omega(\omega-2)}{(\omega-1)^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3(3-2)}{(3-1)^2}
\end{aligned}$$

och alltså

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{2}{\omega}}{(1-\frac{1}{\omega})^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

3. (a) $\frac{4x-x^3}{8-6x+x^2} = \frac{-x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{-x(x+2)}{x-4} \to \frac{-2\cdot(2+2)}{2-4} = 4$ då $x \to 2$.

   (b) $\frac{2x+\ln(x^2 e^x)}{\sqrt{x^2+3x+7}} = \frac{2x+\ln(x^2)+x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} = [\text{för } x>0] = \frac{3x+2\ln x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \frac{3+2\frac{\ln x}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} \to \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}} = 3$ då $x \to \infty$ (enligt standardgränsvärdet $\frac{\ln x}{x} \to 0$).

   (c) $\frac{e^{\tan x}-1}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}\frac{\tan x}{x}\frac{2x}{\sin 2x} \to \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) 4 (b) 3 (c) $\frac{1}{2}$.

4. (a) Med $t = \sqrt{x}$ (så att $x = t^2$ och $dx = 2t\,dt$) fås $\int_0^2 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} e^t\, 2t\, dt = [2(t-1)\,e^t]_0^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}} + 2$.

   (b) Det finns flera framkomliga vägar, exempelvis såhär: $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,(2\cos^2 x - 1)\, dx = [-\frac{2}{3}\cos^3 x + \cos x]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}$.

   (c) Variabelbytet $t = x + 1/2$ (med $dt = dx$) ger $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\, dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}\, dt + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dt}{(2t/\sqrt{3})^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+\frac{3}{4}) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

   Svar: Se ovan.

5. Om burken har radien $r > 0$ och höjden $h > 0$ så är cylinderns area $2\pi rh$, medan botten och locket båda har arean πr^2. Den totala arean är alltså $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$, och volymen är $V = \pi r^2 h$. Ifall A är given så kan vi lösa ut

$$h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r},$$

vilket ger volymen som funktion av r (och A):

$$V(r) = \pi r^2\, \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Ar}{2} - \pi r^3.$$

Definitionsmängden är $0 < r < \sqrt{A/2\pi}$, där den övre gränsen kommer från kravet att $h > 0$. Derivatan

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3\pi r^2$$

har i detta intervall teckenväxlingen "$+\,0\,-$", med nollställe då $r_0 = \sqrt{A/6\pi}$, (gör teckentabell som vanligt). Alltså är $V(\sqrt{A/6\pi})$ det största värdet för $V(r)$ på det aktuella intervallet.

När $r = r_0 = \sqrt{A/6\pi}$ blir sammanlagda arean av botten och locket $2\pi r_0^2 = 2\pi A/6\pi = A/3$, så de utgör tillsammans $1/3$ av den totala arean. Återstående $2/3$ utgörs alltså av cylindern.

Svar: 2/3.

6. Uträkning av integralen ger

$$f(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{c^{\alpha+1} - b^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \neq -1, \\ \ln c - \ln b, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Funktionen är uppenbart kontinuerlig i intervallen $\alpha < -1$ och $\alpha > -1$ eftersom den där ges av ett uttryck bestående av elementära funktioner, så det enda som återstår att undersöka är om f är kontinuerlig i punkten $\alpha = -1$, dvs. om $f(-1+h) \to f(-1)$ då $h \to 0$. Och så är det ju:

$$f(-1+h) = \frac{c^h - b^h}{h} = \underbrace{\frac{e^{h \ln c} - 1}{h \ln c}}_{\to 1} \ln c - \underbrace{\frac{e^{h \ln b} - 1}{h \ln b}}_{\to 1} \ln b \to \ln c - \ln b, \quad h \to 0.$$

7. Integralen är generaliserad både i 0 (om $\alpha > 0$) och ∞, så den är konvergent om och endast om de två delintegralerna

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{x \cos x + (1-\alpha) \sin x}{x^\alpha} \, dx$$

och

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_1^\omega \frac{x \cos x + (1-\alpha) \sin x}{x^\alpha} \, dx$$

är konvergenta.

Integranden kan skrivas $x^{1-\alpha} \cos x + (1-\alpha) x^{-\alpha} \sin x$, vilket är av formen $f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$ med $f(x) = x^{1-\alpha}$ och $g(x) = \sin x$. Den är alltså derivatan av $f(x)\, g(x) = x^{1-\alpha} \sin x$, så integralerna blir

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[x^{1-\alpha} \sin x \Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sin 1 - \varepsilon^{2-\alpha} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) = \begin{cases} \sin 1 - 0, & 2 - \alpha > 0, \\ \sin 1 - 1, & 2 - \alpha = 0, \\ -\infty, & 2 - \alpha < 0 \end{cases}$$

respektive

$$\lim_{\omega \to \infty} \Big[x^{1-\alpha} \sin x \Big]_1^\omega = \lim_{\omega \to \infty} \left(\omega^{1-\alpha} \sin \omega - \sin 1 \right) = \begin{cases} \text{gr.v. saknas}, & 1 - \alpha \geq 0, \\ 0 - \sin 1, & 1 - \alpha < 0. \end{cases}$$

För att båda delintegralerna ska konvergera krävs alltså att olikheterna $2 - \alpha \geq 0$ och $1 - \alpha < 0$ båda gäller, dvs. att $1 < \alpha \leq 2$. Integralens värde blir då summan av de två bidragen ovan, dvs. $(\sin 1) + (-\sin 1) = 0$ då $1 < \alpha < 2$ och $(\sin 1 - 1) + (-\sin 1) = -1$ då $\alpha = 2$.

Svar: Integralen är konvergent om och endast om $1 < \alpha \leq 2$, med värdet 0 för $1 < \alpha < 2$ och värdet -1 för $\alpha = 2$.