Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2018-01-13 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/4}}{x-3}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ (eller visa divergens).

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{4x - x^3}{8 - 6x + x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \ln(x^2 e^x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 7}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\sin 2x}$.

4. Beräkna de bestämda respektive obestämda integralerna

   (a) $\displaystyle\int_0^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2x\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2 + x + 1}\, dx$.

5. En konservburk består av en cirkulär cylinder samt två identiska cirkelskivor, vilka precis passar på cylindern, som botten respektive lock. Burkens totala area är given. Hur stor andel av denna area ska utgöras av cylindern för att burkens volym ska bli så stor som möjligt? (Motivera noga att volymen blir maximal.)

6. Fixera konstanter $0 < b < c$. Definiera $f(\alpha) = \displaystyle\int_b^c t^\alpha\, dt$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Visa att f är kontinuerlig.

7. För vilka $\alpha \in \mathbf{R}$ är den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\cos x + (1-\alpha)\sin x}{x^\alpha}\, dx$ konvergent? Beräkna integralens värde för dessa α.

Lösningsskisser för TATA41 2018-01-13

1. Funktionen $f(x) = \exp(-x^2/4)/(x-3)$ är definierad för $x \neq 3$, och uppfyller uppenbart

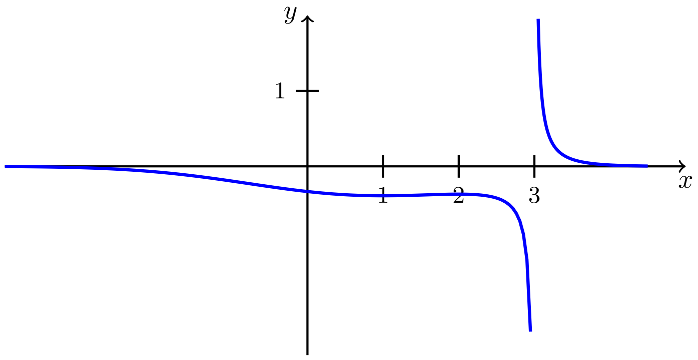
$$f(x) \to \pm\infty \quad \text{då} \quad x \to 3^{\pm}, \qquad f(x) \to 0 \quad \text{då} \quad x \to \pm\infty,$$

så linjen $x = 3$ är en lodrät asymptot och linjen $y = 0$ är en vågrät asymptot. Från derivatan

$$f'(x) = -\exp(-x^2/4)\,\frac{(x-1)(x-2)}{2(x-3)^2}$$

fås teckentabellen

x		1		2		3	
$-\exp(-x^2/4)$	$-$		$-$		$-$		$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$



Svar: Lokalt minimum $f(1) = -\frac{1}{2}e^{-1/4}$. Lokalt maximum $f(2) = -e^{-1}$. Asymptoter: $x = 3$ lodrät, $y = 0$ vågrät (då $x \to \pm\infty$).

2. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int_3^{\omega} \frac{dx}{x^3-3x^2+2x} &= \int_3^{\omega} \left(\frac{1/2}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1/2}{x-2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-2) - \ln(x-1)\right]_3^{\omega} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{\omega(\omega-2)}{(\omega-1)^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3(3-2)}{(3-1)^2}\end{aligned}$$

och alltså

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{2}{\omega}}{(1-\frac{1}{\omega})^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

3. (a) $\frac{4x-x^3}{8-6x+x^2} = \frac{-x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{-x(x+2)}{x-4} \to \frac{-2\cdot(2+2)}{2-4} = 4$ då $x \to 2$.

   (b) $\frac{2x+\ln(x^2e^x)}{\sqrt{x^2+3x+7}} = \frac{2x+\ln(x^2)+x}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} =$ [för $x>0$] $= \frac{3x+2\ln x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} = \frac{3+2\frac{\ln x}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} \to \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}} = 3$ då $x \to \infty$ (enligt standardgränsvärdet $\frac{\ln x}{x} \to 0$).

   (c) $\frac{e^{\tan x}-1}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\frac{e^{\tan x}-1}{\tan x}\frac{\tan x}{x}\frac{2x}{\sin 2x} \to \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) 4 (b) 3 (c) $\frac{1}{2}$.

4. (a) Med $t=\sqrt{x}$ (så att $x=t^2$ och $dx = 2t\,dt$) fås $\int_0^2 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^{\sqrt{2}} e^t\,2t\,dt = [2(t-1)\,e^t]_0^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-1)\,e^{\sqrt{2}}+2$.

   (b) Det finns flera framkomliga vägar, exempelvis såhär: $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2x\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin x\,(2\cos^2 x-1)\,dx = [-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}$.

   (c) Variabelbytet $t = x+1/2$ (med $dt = dx$) ger $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int\frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int\frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int\frac{dt}{(2t/\sqrt{3})^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+\frac{3}{4}) + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

   Svar: Se ovan.

5. Om burken har radien $r>0$ och höjden $h>0$ så är cylinderns area $2\pi rh$, medan botten och locket båda har arean πr^2. Den totala arean är alltså $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$, och volymen är $V = \pi r^2 h$. Ifall A är given så kan vi lösa ut

$$h = \frac{A-2\pi r^2}{2\pi r},$$

vilket ger volymen som funktion av r (och A):

$$V(r) = \pi r^2\,\frac{A-2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Ar}{2} - \pi r^3.$$

Definitionsmängden är $0 < r < \sqrt{A/2\pi}$, där den övre gränsen kommer från kravet att $h>0$. Derivatan

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3\pi r^2$$

har i detta intervall teckenväxlingen "$+\,0\,-$", med nollställe då $r_0 = \sqrt{A/6\pi}$, (gör teckentabell som vanligt). Alltså är $V(\sqrt{A/6\pi})$ det största värdet för $V(r)$ på det aktuella intervallet.

När $r = r_0 = \sqrt{A/6\pi}$ blir sammanlagda arean av botten och locket $2\pi r_0^2 = 2\pi A/6\pi = A/3$, så de utgör tillsammans $1/3$ av den totala arean. Återstående $2/3$ utgörs alltså av cylindern.

Svar: 2/3.

6. Uträkning av integralen ger

$$f(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{c^{\alpha+1} - b^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha \neq -1, \\ \ln c - \ln b, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Funktionen är uppenbart kontinuerlig i intervallen $\alpha < -1$ och $\alpha > -1$ eftersom den där ges av ett uttryck bestående av elementära funktioner, så det enda som återstår att undersöka är om f är kontinuerlig i punkten $\alpha = -1$, dvs. om $f(-1+h) \to f(-1)$ då $h \to 0$. Och så är det ju:

$$f(-1+h) = \frac{c^h - b^h}{h} = \underbrace{\frac{e^{h \ln c} - 1}{h \ln c}}_{\to 1} \ln c - \underbrace{\frac{e^{h \ln b} - 1}{h \ln b}}_{\to 1} \ln b \to \ln c - \ln b, \quad h \to 0.$$

7. Integralen är generaliserad både i 0 (om $\alpha > 0$) och ∞, så den är konvergent om och endast om de två delintegralerna

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{x \cos x + (1-\alpha) \sin x}{x^\alpha} \, dx$$

och

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_1^\omega \frac{x \cos x + (1-\alpha) \sin x}{x^\alpha} \, dx$$

är konvergenta.

Integranden kan skrivas $x^{1-\alpha} \cos x + (1-\alpha) x^{-\alpha} \sin x$, vilket är av formen $f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$ med $f(x) = x^{1-\alpha}$ och $g(x) = \sin x$. Den är alltså derivatan av $f(x)\, g(x) = x^{1-\alpha} \sin x$, så integralerna blir

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[x^{1-\alpha} \sin x \Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sin 1 - \varepsilon^{2-\alpha} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \right) = \begin{cases} \sin 1 - 0, & 2 - \alpha > 0, \\ \sin 1 - 1, & 2 - \alpha = 0, \\ -\infty, & 2 - \alpha < 0 \end{cases}$$

respektive

$$\lim_{\omega \to \infty} \Big[x^{1-\alpha} \sin x \Big]_1^\omega = \lim_{\omega \to \infty} \left(\omega^{1-\alpha} \sin \omega - \sin 1 \right) = \begin{cases} \text{gr.v. saknas}, & 1 - \alpha \geq 0, \\ 0 - \sin 1, & 1 - \alpha < 0. \end{cases}$$

För att båda delintegralerna ska konvergera krävs alltså att olikheterna $2 - \alpha \geq 0$ och $1 - \alpha < 0$ båda gäller, dvs. att $1 < \alpha \leq 2$. Integralens värde blir då summan av de två bidragen ovan, dvs. $(\sin 1) + (-\sin 1) = 0$ då $1 < \alpha < 2$ och $(\sin 1 - 1) + (-\sin 1) = -1$ då $\alpha = 2$.

Svar: Integralen är konvergent om och endast om $1 < \alpha \leq 2$, med värdet 0 för $1 < \alpha < 2$ och värdet -1 för $\alpha = 2$.