Lösningsskisser för TATA41 2017-08-22

1. (a) $F(x) = \int \frac{3x-1}{x^3+x}\,dx = 3\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln|x| + C$, eftersom $F'(x) = \frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3+x}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(3+x)x-(1+x^2)}{(1+x^2)x} = \frac{3x-1}{x^3+x}$.

   (b) $F(x) = \int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$, eftersom $F'(x) = 1\cdot\ln(x^2+1) + x\cdot\frac{2x}{1+x^2} - 2 + \frac{2}{1+x^2} = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2-2(1+x^2)+2}{1+x^2} = \ln(x^2+1)$.

   (c) $F(x) = \int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$, eftersom $F'(x) = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}} + 2(\sqrt{x}-1)\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot(1+(\sqrt{x}-1)) = e^{\sqrt{x}}$.

   Svar: Se ovan.

2. Derivering av $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 2\ln|x|$ ger

$$f'(x) = x^2 - 4x + 5 - \frac{2}{x} = \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x} = \frac{(x-1)^2(x-2)}{x}$$

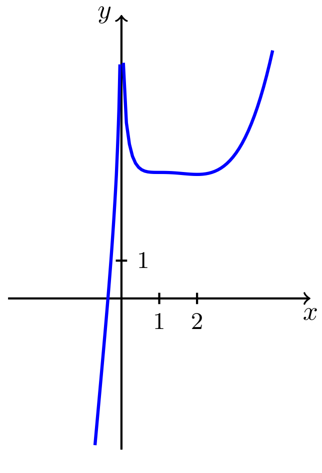
och därmed följande teckentabell:

x		0		1		2	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$	terrass-punkt	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Det enda icketriviala gränsvärdet (av typ "$\infty-\infty$" innan man gjort nedanstående omskrivning) är

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2\ln|x|}{x^3}\right) \to \infty \quad \text{då } x \to \infty,$$

eftersom $x^3 \to \infty$ och parentesen går mot det positiva värdet $\frac{1}{3} - 0 + 0 - 0$ enligt standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$. Övriga relevanta gränsvärden är uppenbara: $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$, och $f(x) \to \infty$ då $x \to 0$.



Svar: Lokalt minimum $f(2) = \frac{14}{3} - 2\ln 2$. Lokala maxima saknas. (Terrasspunkt $f(1) = \frac{10}{3}$.) Linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$. Vågräta asymptoter saknas.

3. (a) $\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^3} = (x-3)\cdot\frac{1}{(x-1)^2} \to -\infty$ då $x \to 1$, eftersom $x-3 \to -2 < 0$ och $\frac{1}{(x-1)^2} \to \infty$ (eftersom nämnaren $(x-1)^2$ är *positiv* för alla $x \neq 1$, och går mot noll).

(b) Med $x = 1+t$ fås $\frac{\sin \pi x}{e^x - e} = \frac{\sin(\pi+\pi t)}{e^{1+t}-e} = \frac{-\sin \pi t}{e(e^t-1)} = -\frac{\pi}{e}\cdot\frac{\sin \pi t}{\pi t}\cdot\frac{t}{e^t-1} \to -\frac{\pi}{e}\cdot 1\cdot 1$ då $t \to 0$, dvs. då $x \to 1$, enligt ett par standardgränsvärden.

(c) $\frac{\ln(e^{2x}+e^{3x})}{x} = \frac{\ln(e^{2x}(1+e^x))}{x} = \frac{\ln e^{2x}+\ln(1+e^x)}{x} = 2 + \frac{1}{x}\cdot\ln(1+e^x) \to 2 + 0\cdot \ln(1+0) = 2$ då $x \to -\infty$.

Svar: (a) $-\infty$ (b) $-\pi/e$ (c) 2

4. Olikheten kan skrivas $f(x) \geq 0$, där $f(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Denna funktion f är definierad för $x > 0$ och har derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}.$$

Alltså är $f'(x) < 0$ för alla $x > 0$, förutom att $f'(x) = 0$ då $x = 1$. Detta medför att f är strängt avtagande på $]0,\infty[$, med en terrasspunkt $f(1) = 0$. Så $f(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq 1$.

Svar: $0 < x \leq 1$.

5. (a) **Falskt.** T.ex. är $f(x) = |x|$ kontinuerlig på $\mathbf{R}$ men ej deriverbar på $\mathbf{R}$ (eftersom $f'(0)$ inte existerar).

(b) **Sant.** Deriverbarhet i varje punkt $a \in \mathbf{R}$ medför kontinuitet i varje punkt $a \in \mathbf{R}$. Beviset står i kursboken (Forsling & Neymark), Sats 4.1.

(c) **Falskt**. Betrakta t.ex.

$$f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$$

som har derivatan

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h} = 0, & x = 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

dvs. $f'(x) = 2\,|x|$. Funktionen f är alltså deriverbar för varje $x \in \mathbf{R}$ (inklusive $x = 0$), men derivatan f' är (enligt (a)) inte deriverbar på $\mathbf{R}$. (Anm.: f' behöver inte ens vara kontinuerlig, men sådana exempel är svårare att komma på. T.ex. kan man ta $f(x) = x^2\sin(1/x)$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$, så existerar $f'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$, speciellt $f'(0) = 0$, men $f'(x)$ saknar gränsvärde då $x \to 0$, och f' blir därmed diskontinuerlig i 0.)

6. Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\int_0^\omega x^2\, e^{-x^2}\, dx &= \int_0^\omega (-x/2)\cdot(-2x)\, e^{-x^2}\, dx \\ &= \Big[(-x/2)\, e^{-x^2}\Big]_0^\omega - \int_0^\omega (-1/2)\, e^{-x^2}\, dx \\ &= -\frac{\omega}{2e^{\omega^2}} + \frac{1}{2}\int_0^\omega e^{-x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Låt nu $\omega \to \infty$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2\, e^{-x^2}\, dx &= \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\omega x^2\, e^{-x^2}\, dx \\ &= \lim_{\omega\to\infty} \left(-\frac{\omega}{2e^{\omega^2}} + \frac{1}{2}\int_0^\omega e^{-x^2}\, dx\right) \\ &= 0 + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},\end{aligned}$$

där vi har använt att e^{ω^2} går mot oändligheten mycket fortare än ω. (Såhär, om man vill vara noggrann: $\frac{\omega}{e^{\omega^2}} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega^2}{e^{\omega^2}} \to 0\cdot 0$ då $\omega\to\infty$, enligt standardgränsvärdet $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 0$.)

Svar: $\sqrt{\pi}/4$.

7. Vi söker maximum och minimum av $f(x) = (x-a)\, e^{-x}$ på intervallet $[0,3]$. Ändpunktsvärdena

$$f(0) = -a, \qquad f(3) = (3-a)\, e^{-3},$$

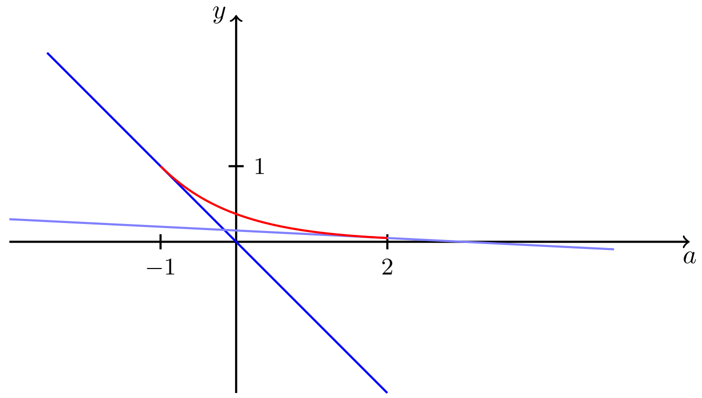
är kandidater. Extremvärden kan också antas i inre punkter där derivatan är noll:

$$f'(x) = (1-x+a)\, e^{-x} = 0 \quad\iff\quad x = a+1.$$

Förutsatt att $a+1 \in\,]0,3[$, dvs. $a \in\,]-1,2[$, är alltså även värdet

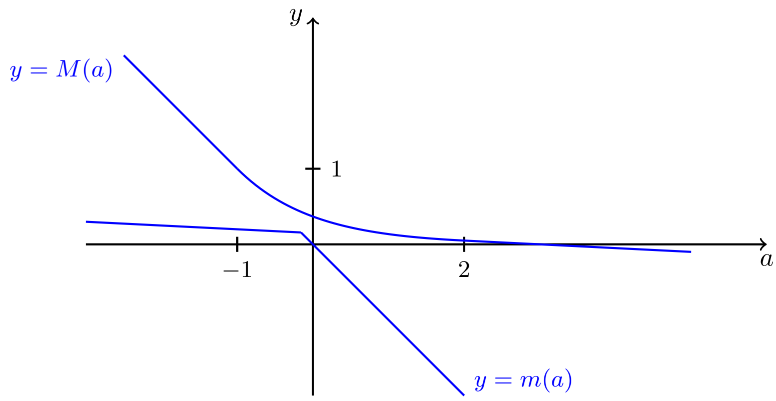
$$f(a+1) = e^{-a-1}$$

en kandidat till största/minsta värde. Storleksjämförelse av de tre kandidatvärdena för olika a görs enklast grafiskt; rita linjerna $y=-a$ och $y=(3-a)\, e^{-3}$ (för $a\in\mathbf{R}$) och kurvan $y=e^{-a-1}$ (för $-1<a<2$) i samma diagram:



[Den röda kurvan $y = e^{-a-1}$ ligger verkligen ovanför båda linjerna, så som figuren antyder. Ett argument för detta är att $f'(x)$ har teckenväxlingen $+0-$, så $f(a+1)$ är alltid ett globalt maximum, och detta värde måste därför vara större än $f(0)$ och $f(3)$ då $0 < a+1 < 3$. Ett annat argument är att kurvan är konvex (andraderivatan d^2y/da^2 är positiv), och tangerar linjerna i $a = -1$ resp. $a = 2$ (enligt en enkel uträkning), och en konvex kurva ligger alltid ovanför sina tangentlinjer.]

De sökta kurvorna $y = m(a)$ och $y = M(a)$ fås genom att ta punktvis minimum resp. maximum av de tre kurvorna ovan:



I formler:

$$m(a) = \begin{cases} (3-a)\,e^{-3}, & a \leq \dfrac{-3}{e^3-1}, \\ -a, & \dfrac{-3}{e^3-1} < a, \end{cases} \qquad M(a) = \begin{cases} -a, & a \leq -1, \\ e^{-a-1}, & -1 < a < 2, \\ (3-a)\,e^{-3}, & 2 \leq a. \end{cases}$$