Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-08-22 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna nedanstående obestämda integraler.

   Obs! Själva integraluträkningen ska **inte** redovisas denna gång, men istället ska en **kontrollderivering** göras! Du ska alltså ange den primitiva funktion $F(x)$ som du (på kladdpapper) kommit fram till, samt redovisa en uträkning av dess derivata $F'(x)$ som visar att $F'(x)$ verkligen är lika med den funktion $f(x)$ som du har integrerat.

   $$\text{(a)}\quad \int \frac{3x-1}{x^3+x}\,dx \qquad \text{(b)}\quad \int \ln(x^2+1)\,dx \qquad \text{(c)}\quad \int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

2. Låt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 2\ln|x|$ för $x \neq 0$. Rita grafen $y = f(x)$ och ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

3. Undersök följande gränsvärden:

   $$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+3x-1} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{e^x - e} \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(e^{2x}+e^{3x})}{x}$$

4. För vilka $x \in \mathbf{R}$ gäller olikheten $\ln x \geq \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$?

5. Sant eller falskt? Motivera genom att ge bevis eller motexempel.

   (a) Om f är kontinuerlig på $\mathbf{R}$ så måste f vara deriverbar på $\mathbf{R}$.

   (b) Om f är deriverbar på $\mathbf{R}$ så måste f vara kontinuerlig på $\mathbf{R}$.

   (c) Om f är deriverbar på $\mathbf{R}$ så måste derivatan f' också vara deriverbar på $\mathbf{R}$.

6. Man kan visa att $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$. Givet detta resultat, beräkna $\displaystyle\int_0^\infty x^2\, e^{-x^2}dx$.

7. För $a \in \mathbf{R}$, låt $m(a)$ och $M(a)$ beteckna det minsta resp. det största värdet av $f(x) = (x-a)\,e^{-x}$ på intervallet $[0, 3]$. Rita graferna för funktionerna m och M, dvs. kurvorna $y = m(a)$ och $y = M(a)$ i ett (a, y)-koordinatsystem.