

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-08-22 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Beräkna nedanstående obestämda integraler.

Obs! Själva integraluträkningen ska **inte** redovisas denna gång, men istället ska en **kontrollderivering** göras! Du ska alltså ange den primitiva funktion $F(x)$ som du (på kladdpapper) kommit fram till, samt redovisa en uträkning av dess derivata $F'(x)$ som visar att $F'(x)$ verkligen är lika med den funktion $f(x)$ som du har integrerat.

$$(a) \int \frac{3x-1}{x^3+x} dx \quad (b) \int \ln(x^2+1) dx \quad (c) \int e^{\sqrt{x}} dx$$

2. Låt $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \ln|x|$ för $x \neq 0$. Rita grafen $y = f(x)$ och ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

3. Undersök följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{e^x - e} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x})}{x}$$

4. För vilka $x \in \mathbf{R}$ gäller olikheten $\ln x \geq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$?

5. Sant eller falskt? Motivera genom att ge bevis eller motexempel.

- (a) Om f är kontinuerlig på \mathbf{R} så måste f vara deriverbar på \mathbf{R} .
(b) Om f är deriverbar på \mathbf{R} så måste f vara kontinuerlig på \mathbf{R} .
(c) Om f är deriverbar på \mathbf{R} så måste derivatan f' också vara deriverbar på \mathbf{R} .

6. Man kan visa att $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$. Givet detta resultat, beräkna $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$.

7. För $a \in \mathbf{R}$, låt $m(a)$ och $M(a)$ beteckna det minsta resp. det största värdet av $f(x) = (x-a)e^{-x}$ på intervallet $[0, 3]$. Rita graferna för funktionerna m och M , dvs. kurvorna $y = m(a)$ och $y = M(a)$ i ett (a, y) -koordinatsystem.

Lösningsskisser för TATA41 2017-08-22

1. (a) $F(x) = \int \frac{3x-1}{x^3+x} dx = 3 \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln|x| + C$, eftersom
 $F'(x) = \frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{3+x}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{(3+x)x - (1+x^2)}{(1+x^2)x} = \frac{3x-1}{x^3+x}$.
- (b) $F(x) = \int \ln(x^2+1) dx = x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C$, eftersom
 $F'(x) = 1 \cdot \ln(x^2+1) + x \cdot \frac{2x}{1+x^2} - 2 + \frac{2}{1+x^2} = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2-2(1+x^2)+2}{1+x^2} = \ln(x^2+1)$.
- (c) $F(x) = \int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$, eftersom $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} + 2(\sqrt{x}-1) \cdot \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot (1 + (\sqrt{x}-1)) = e^{\sqrt{x}}$.

Svar: Se ovan.

2. Derivering av $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \ln|x|$ ger

$$f'(x) = x^2 - 4x + 5 - \frac{2}{x} = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x} = \frac{(x-1)^2(x-2)}{x}$$

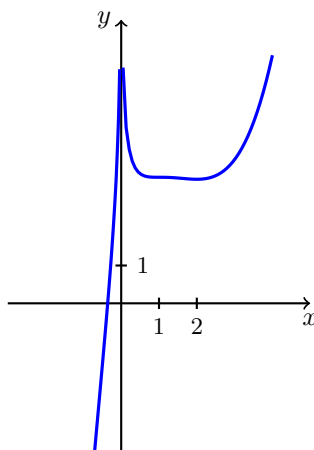
och därmed följande teckentabell:

x		0		1		2	
x	-	0	+		+		+
$(x-1)^2$	+		+	0	+		+
$x-2$	-		-		-	0	+
$f'(x)$	+	ej def.	-	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	ej def.	\searrow	terrasspunkt	\searrow	lok. min.	\nearrow

Det enda icke-triviala gränsvärdet (av typ ” $\infty-\infty$ ” innan man gjort nedanstående omskrivning) är

$$f(x) = x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2 \ln|x|}{x^3} \right) \rightarrow \infty \quad \text{då } x \rightarrow \infty,$$

eftersom $x^3 \rightarrow \infty$ och parentesen går mot det positiva värdet $\frac{1}{3} - 0 + 0 - 0$ enligt standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$. Övriga relevanta gränsvärden är uppenbara: $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$, och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0$.



Svar: Lokalt minimum $f(2) = \frac{14}{3} - 2 \ln 2$. Lokala maxima saknas. (Terrasspunkt $f(1) = \frac{10}{3}$.) Linjen $x=0$ är en lodrät asymptot till grafen $y=f(x)$. Vågräta asymptoter saknas.

3. (a) $\frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^3} = (x-3) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow 1$, eftersom $x-3 \rightarrow -2 < 0$ och $\frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow \infty$ (eftersom nämnaren $(x-1)^2$ är *positiv* för alla $x \neq 1$, och går mot noll).
- (b) Med $x = 1+t$ fås $\frac{\sin \pi x}{e^x - e} = \frac{\sin(\pi + \pi t)}{e^{1+t} - e} = \frac{-\sin \pi t}{e(e^t - 1)} = -\frac{\pi}{e} \cdot \frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} \rightarrow -\frac{\pi}{e} \cdot 1 \cdot 1$ då $t \rightarrow 0$, dvs. då $x \rightarrow 1$, enligt ett par standardgränsvärden.
- (c) $\frac{\ln(e^{2x} + e^{3x})}{x} = \frac{\ln(e^{2x}(1+e^x))}{x} = \frac{\ln e^{2x} + \ln(1+e^x)}{x} = 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+e^x) \rightarrow 2 + 0 \cdot \ln(1+0) = 2$ då $x \rightarrow -\infty$.

Svar: (a) $-\infty$ (b) $-\pi/e$ (c) 2

4. Olikheten kan skrivas $f(x) \geq 0$, där $f(x) = \ln x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Denna funktion f är definierad för $x > 0$ och har derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{2x\sqrt{x}}.$$

Alltså är $f'(x) < 0$ för alla $x > 0$, förutom att $f'(x) = 0$ då $x = 1$. Detta medför att f är strängt avtagande på $]0, \infty[$, med en terrasspunkt $f(1) = 0$. Så $f(x) \geq 0 \iff 0 < x \leq 1$.

Svar: $0 < x \leq 1$.

5. (a) **Falskt.** T.ex. är $f(x) = |x|$ kontinuerlig på \mathbf{R} men ej deriverbar på \mathbf{R} (eftersom $f'(0)$ inte existerar).
- (b) **Sant.** Deriverbarhet i varje punkt $a \in \mathbf{R}$ medför kontinuitet i varje punkt $a \in \mathbf{R}$. Beviset står i kursboken (Forsling & Neymark), Sats 4.1.
- (c) **Falskt.** Betrakta t.ex.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$$

som har derivatan

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|-0}{h} = 0, & x = 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

dvs. $f'(x) = 2|x|$. Funktionen f är alltså deriverbar för varje $x \in \mathbf{R}$ (inklusive $x = 0$), men derivatan f' är (enligt (a)) inte deriverbar på \mathbf{R} . (Anm.: f' behöver inte ens vara kontinuerlig, men sådana exempel är svårare att komma på. T.ex. kan man ta $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$, så existerar $f'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$, speciellt $f'(0) = 0$, men $f'(x)$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow 0$, och f' blir därmed diskontinuerlig i 0.)

6. Partiell integration ger

$$\begin{aligned} \int_0^\omega x^2 e^{-x^2} dx &= \int_0^\omega (-x/2) \cdot (-2x) e^{-x^2} dx \\ &= \left[(-x/2) e^{-x^2} \right]_0^\omega - \int_0^\omega (-1/2) e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{\omega}{2e^{\omega^2}} + \frac{1}{2} \int_0^\omega e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Låt nu $\omega \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega x^2 e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(-\frac{\omega}{2e^{\omega^2}} + \frac{1}{2} \int_0^\omega e^{-x^2} dx \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

där vi har använt att e^{ω^2} går mot oändligheten mycket fortare än ω . (Såhär, om man vill vara noggrann: $\frac{\omega}{e^{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{e^{\omega^2}} \rightarrow 0 \cdot 0$ då $\omega \rightarrow \infty$, enligt standardgränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$.)

Svar: $\sqrt{\pi}/4$.

7. Vi söker maximum och minimum av $f(x) = (x - a) e^{-x}$ på intervallet $[0, 3]$. Ändpunktsvärdena

$$f(0) = -a, \quad f(3) = (3 - a) e^{-3},$$

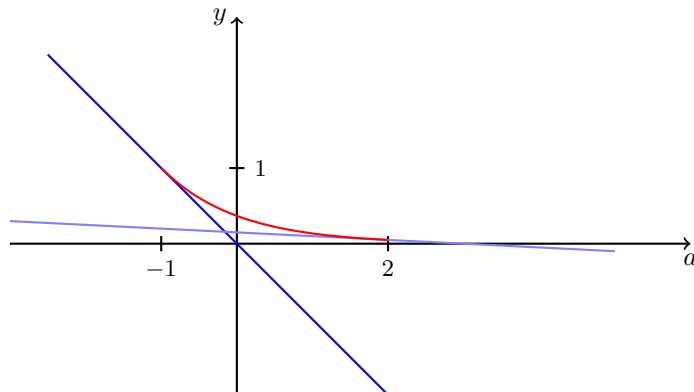
är kandidater. Extremvärdena kan också antas i inre punkter där derivatan är noll:

$$f'(x) = (1 - x + a) e^{-x} = 0 \quad \iff \quad x = a + 1.$$

Förutsatt att $a + 1 \in]0, 3[$, dvs. $a \in]-1, 2[$, är alltså även värdet

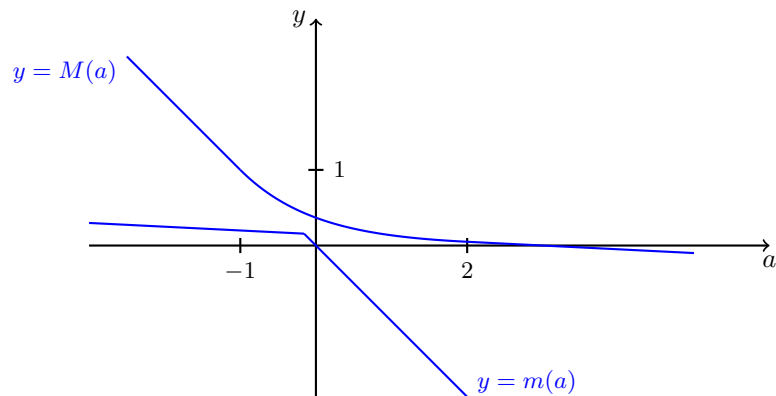
$$f(a + 1) = e^{-a-1}$$

en kandidat till största/minsta värde. Storleksjämförelse av de tre kandidatvärdena för olika a görs enklast grafiskt; rita linjerna $y = -a$ och $y = (3 - a) e^{-3}$ (för $a \in \mathbf{R}$) och kurvan $y = e^{-a-1}$ (för $-1 < a < 2$) i samma diagram:



[Den röda kurvan $y = e^{-a-1}$ ligger verkligen ovanför båda linjerna, så som figuren antyder. Ett argument för detta är att $f'(x)$ har teckenväxlingen $+0-$, så $f(a+1)$ är alltid ett globalt maximum, och detta värde måste därför vara större än $f(0)$ och $f(3)$ då $0 < a+1 < 3$. Ett annat argument är att kurvan är konvex (andraderivatan d^2y/da^2 är positiv), och tangerar linjerna i $a = -1$ resp. $a = 2$ (enligt en enkel uträkning), och en konvex kurva ligger alltid ovanför sina tangentlinjer.]

De sökta kurvorna $y = m(a)$ och $y = M(a)$ fås genom att ta punktvis minimum resp. maximum av de tre kurvorna ovan:



I formler:

$$m(a) = \begin{cases} (3-a)e^{-3}, & a \leq \frac{-3}{e^3-1}, \\ -a, & \frac{-3}{e^3-1} < a, \end{cases} \quad M(a) = \begin{cases} -a, & a \leq -1, \\ e^{-a-1}, & -1 < a < 2, \\ (3-a)e^{-3}, & 2 \leq a. \end{cases}$$