Lösningsskisser för TATA41 2017-06-05

1. (a) Med $x = 1 + t$ fås $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+2t)}{t^2+3t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+2t)}{2t} \cdot \frac{2}{t+3}\right) = 1 \cdot \frac{2}{0+3} = \frac{2}{3}$, enligt ett standardgränsvärde.

   (b) $x - \ln(x+3e^x) = x - \ln(e^x(\frac{x}{e^x}+3)) = -\ln(\frac{x}{e^x}+3) \to -\ln(0+3) = -\ln 3$ då $x \to \infty$, enligt ett standardgränsvärde.

   (c) Med $t = -x$ fås $x + \sqrt{x^2-17x} = \sqrt{t^2+17t} - t = \frac{(t^2+17t)-t^2}{\sqrt{t^2+17t}+t} =$ [för $t > 0$] $= \frac{17}{\sqrt{1+17t^{-1}}+1} \to \frac{17}{2}$ då $t \to \infty$, dvs. då $x \to -\infty$.

   Svar: (a) $2/3$ (b) $-\ln 3$ (c) $17/2$

2. (a) $\int x \arctan x\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2/2}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C = \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \sqrt{x+3}$, $x = t^2 - 3$, $dx = 2t\, dt$ ger $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+3}}\, dx = \int \frac{(t^2-3)+2}{t} 2t\, dt = 2\int (t^2-1)\, dt = 2(\frac{1}{3}t^3 - t) + C = \frac{2}{3}(t^2-3)t + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x+3} + C$.

   (c) Enklast är $\int \sin 2x \cos^3 x\, dx = \int 2\sin x \cos^4 x\, dx = -\frac{2}{5}\cos^5 x + C$. Ett jobbigare alternativ är produkt-till-summa-omskrivning (t.ex. med hjälp av Eulers formler) vilket ger $\int \sin 2x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{8}\int(\sin 5x + 3\sin 3x + 2\sin x)\, dx = -\frac{1}{40}\cos 5x - \frac{1}{8}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x + C$ (vilket är samma sak).

   Svar: Se ovan.

3. (a) $\int_0^\omega \frac{2x}{1+x^2}\, dx = [\ln(1+x^2)]_0^\omega = \ln(1+\omega^2) \to \infty$ då $\omega \to \infty$, så $\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ är divergent.

   (b) $\int_\varepsilon^1 \ln x\, dx = [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon \to -1 - 0 + 0$ då $\varepsilon \to 0^+$, enligt standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0^+} x^k \ln x = 0$ för $k > 0$, så $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$.

   (c) $\int_0^\omega \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = [\arctan(\sin x)]_0^\omega = \arctan(\sin\omega)$ oscillerar periodiskt mellan $-\pi/4$ och $\pi/4$, och saknar därför gränsvärde då $\omega \to \infty$, så $\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$ är divergent.

   Svar: (a) Divergent (b) -1 (c) Divergent

4. Ekvationen har formen $f(x) = k$, där funktionen $f(x) = (x+6)\, e^{1/x}$ är definierad för alla $x \neq 0$ och har derivatan

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/x} + (x+6) \cdot \frac{-e^{1/x}}{x^2} = \frac{(x+2)(x-3)\, e^{1/x}}{x^2},$$

vilket ger nedanstående teckentabell:

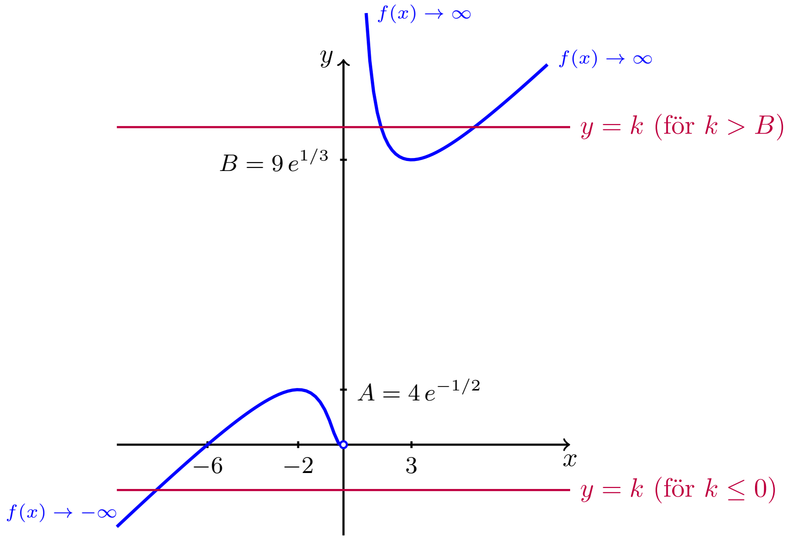
x		-2		0		3	
$\exp(1/x)/x^2$	$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Det lokala maximivärdet $A = f(-2) = 4\, e^{-1/2}$ är uppenbart mindre än det lokala minimivärdet $B = f(3) = 9\, e^{1/3}$. För att kunna rita grafen behöver vi också följande gränsvärden:

$$f(x) \to \pm\infty \quad \text{då } x \to \pm\infty,$$
$$f(x) \to \infty \quad \text{då } x \to 0^+,$$
$$f(x) \to 0 \quad \text{då } x \to 0^-.$$

(Det är också användbart att notera att f:s tecken avgörs av faktorn $x+6$, och speciellt att $x=-6$ är funktionens enda nollställe.)

Antalet reella lösningar till ekvationen $f(x)=k$ avläses genom att räkna hur många punkter kurvan $y=f(x)$ och linjen $y=k$ har gemensamt. (Figuren illustrerar att det t.ex. blir två stycken ifall $k>B$, och en ifall $k\le 0$.)



Svar: Låt $A=4\,e^{-1/2}$ och $B=9\,e^{1/3}$. Ekvationen $(x+6)\,e^{1/x}=k$ har två lösningar om $0<k<A$ eller $k>B$, den har en lösning om $k\le 0$ eller $k=A$ eller $k=B$, och den saknar lösning om $A<k<B$.

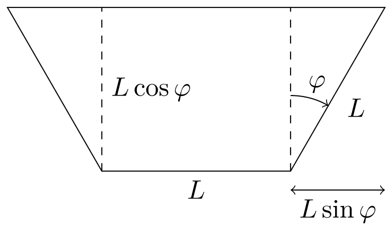
(Anm.: Det är underförstått att resonemanget bygger på satsen om mellanliggande värde, som ju garanterar att den kontinuerliga funktionen $f(x)$ verkligen *antar* de värden som indikeras av grafen.)

5. Med beteckningar enligt nedanstående figur söker vi maximum av arean

$$A(\varphi)=(L+L\sin\varphi)L\cos\varphi=L^2\underbrace{\left(\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)}_{f(\varphi)}$$

då vinkeln φ kan antas ligga i intervallet $0\le\varphi<\pi/2$; det är ju uppenbart att varje vinkel i intervallet $-\pi/6<\varphi<0$ ger ett parallelltrapets med *mindre* area än för motsvarande positiva vinkel.

(Alternativt, kalla sträckan $L\sin\varphi$ för x, så att $L\cos\varphi$ blir $\sqrt{L^2-x^2}$, och maximera $A(x)=(x+L)\sqrt{L^2-x^2}$ för $0\le x<L$.)



Funktionen $f(\varphi)=\cos\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi$ antar sina extremvärden i intervallet $[0,\pi/2]$ antingen i ändpunkterna (dvs. $f(0)=1$ resp. $f(\pi/2)=0$) eller där derivatan

$$f'(\varphi) = -\sin\varphi + \cos 2\varphi = -\sin\varphi + 1 - 2\sin^2\varphi = -(2\sin\varphi - 1)(\sin\varphi + 1)$$

är noll, vilket i det aktuella intervallet bara inträffar när $\varphi = \pi/6$. Värdet där,

$$f(\pi/6) = \cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

är större än ändpunktsvärdena, och är därmed funktionens största värde i intervallet $[0, \pi/2]$ (och då även i intervallet $[0, \pi/2[$ såklart).

Svar: Den största möjliga arean är $3\sqrt{3}\,L^2/4$.

6. Låt $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x}$ för $x > 0$. Detta är en avtagande och positiv funktion, så (rita figur!)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3 + k} &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \\
&\le f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2} + \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\
&= \tfrac{1}{2} + \Big[\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_1^n \\
&= \tfrac{1}{2} + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln(n^2+1) - (\ln 1 - \tfrac{1}{2}\ln 2) \\
&= \tfrac{1}{2}(1 + \ln 2 + \underbrace{\ln(n^2) - \ln(n^2+1)}_{<\,0,\text{ ty ln är str. väx.}}) \\
&< \tfrac{1}{2}(1 + \ln 2),
\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

7. Sätt $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ för $0 < x < 1$; då är

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 2 \qquad \text{för } 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

Låt nu $0 < a < b < 1$; då gäller

$$\ln\frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)} = \ln\frac{1+b}{1-b} - \ln\frac{1+a}{1-a} = f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a),$$

för något tal $\xi \in\,]a, b[$, enligt medelvärdessatsen för derivator. Enligt $(*)$ är $f'(\xi) > 2$, så

$$\ln\frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)} = f'(\xi)\cdot(b-a) > 2(b-a),$$

vilket skulle visas.