

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-06-05 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Undersök gränsvärdena

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x - 1)}{x^2 + x - 2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(x + 3e^x)) \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 17x}).$$

2. Beräkna de obestämda integralerna

$$(a) \int x \arctan x \, dx \quad (b) \int \frac{x + 2}{\sqrt{x + 3}} \, dx \quad (c) \int \sin 2x \cos^3 x \, dx.$$

3. Beräkna de generaliserade integralerna (eller visa divergens)

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{2x}{1 + x^2} \, dx \quad (b) \int_0^1 \ln x \, dx \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, dx.$$

4. Hur många reella lösningar har ekvationen $(x + 6)e^{1/x} = k$ för olika reella värden på konstanten k ?

5. Ett parallelltrapets är som bekant en fyrhörning med två parallella sidor. Vilken är den största area som ett parallelltrapets kan ha om tre av dess sidor har längd L ?



6. Visa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + k} < \frac{1 + \ln 2}{2}$ för alla heltal $n \geq 1$.

7. Antag att $0 < a < b < 1$. Visa att $\ln \frac{(1 - a)(1 + b)}{(1 + a)(1 - b)} > 2(b - a)$.

Lösningsskisser för TATA41 2017-06-05

1. (a) Med $x = 1 + t$ fås $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t)}{t^2+3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2t)}{2t} \cdot \frac{2}{t+3} \right) = 1 \cdot \frac{2}{0+3} = \frac{2}{3}$, enligt ett standardgränsvärde.
- (b) $x - \ln(x + 3e^x) = x - \ln(e^x(\frac{x}{e^x} + 3)) = -\ln(\frac{x}{e^x} + 3) \rightarrow -\ln(0 + 3) = -\ln 3$ då $x \rightarrow \infty$, enligt ett standardgränsvärde.
- (c) Med $t = -x$ fås $x + \sqrt{x^2 - 17x} = \sqrt{t^2 + 17t} - t = \frac{(t^2+17t)-t^2}{\sqrt{t^2+17t}+t} =$
 [för $t > 0$] $= \frac{17}{\sqrt{1+17t^{-1}}+1} \rightarrow \frac{17}{2}$ då $t \rightarrow \infty$, dvs. då $x \rightarrow -\infty$.

Svar: (a) $2/3$ (b) $-\ln 3$ (c) $17/2$

2. (a) $\int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2/2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2}x + C$.
- (b) Variabelbytet $t = \sqrt{x+3}$, $x = t^2 - 3$, $dx = 2t dt$ ger $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+3}} dx = \int \frac{(t^2-3)+2}{t} 2t dt = 2 \int (t^2 - 1) dt = 2(\frac{1}{3}t^3 - t) + C = \frac{2}{3}(t^2 - 3)t + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x+3} + C$.
- (c) Enklast är $\int \sin 2x \cos^3 x dx = \int 2 \sin x \cos^4 x dx = -\frac{2}{5} \cos^5 x + C$. Ett jobbigare alternativ är produkt-till-summa-omskrivning (t.ex. med hjälp av Eulers formler) vilket ger $\int \sin 2x \cos^3 x dx = \frac{1}{8} \int (\sin 5x + 3 \sin 3x + 2 \sin x) dx = -\frac{1}{40} \cos 5x - \frac{1}{8} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x + C$ (vilket är samma sak).

Svar: Se ovan.

3. (a) $\int_0^\omega \frac{2x}{1+x^2} dx = [\ln(1+x^2)]_0^\omega = \ln(1+\omega^2) \rightarrow \infty$ då $\omega \rightarrow \infty$, så $\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2} dx$ är divergent.
- (b) $\int_\varepsilon^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \rightarrow -1 - 0 + 0$ då $\varepsilon \rightarrow 0^+$, enligt standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k \ln x = 0$ för $k > 0$, så $\int_0^1 \ln x dx = -1$.
- (c) $\int_0^\omega \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x} = [\arctan(\sin x)]_0^\omega = \arctan(\sin \omega)$ oscillerar periodiskt mellan $-\pi/4$ och $\pi/4$, och saknar därför gränsvärde då $\omega \rightarrow \infty$, så $\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$ är divergent.

Svar: (a) Divergent (b) -1 (c) Divergent

4. Ekvationen har formen $f(x) = k$, där funktionen $f(x) = (x+6)e^{1/x}$ är definierad för alla $x \neq 0$ och har derivatan

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1/x} + (x+6) \cdot \frac{-e^{1/x}}{x^2} = \frac{(x+2)(x-3)e^{1/x}}{x^2},$$

vilket ger nedanstående teckentabell:

x	-2	0	3
$\exp(1/x)/x^2$	+	ej def.	+
$x+2$	-	0	+
$x-3$	-	-	0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ lok. max.	↘ ej def.	↘ lok. min. ↗

Det lokala maximivärdet $A = f(-2) = 4e^{-1/2}$ är uppenbart mindre än det lokala minimivärdet $B = f(3) = 9e^{1/3}$. För att kunna rita grafen behöver vi också följande gränsvärden:

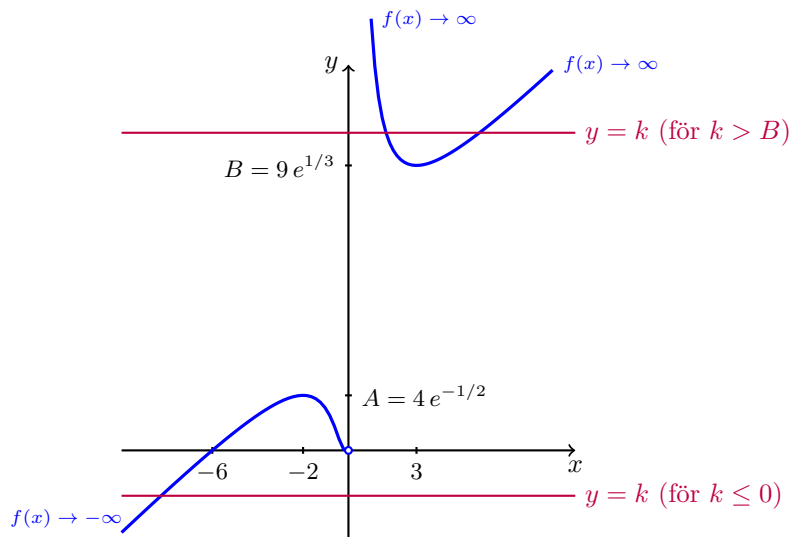
$$f(x) \rightarrow \pm\infty \quad \text{då } x \rightarrow \pm\infty,$$

$$f(x) \rightarrow \infty \quad \text{då } x \rightarrow 0^+,$$

$$f(x) \rightarrow 0 \quad \text{då } x \rightarrow 0^-.$$

(Det är också användbart att notera att f :s tecken avgörs av faktorn $x + 6$, och speciellt att $x = -6$ är funktionens enda nollställe.)

Antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = k$ avläses genom att räkna hur många punkter kurvan $y = f(x)$ och linjen $y = k$ har gemensamt. (Figuren illustrerar att det t.ex. blir två stycken ifall $k > B$, och en ifall $k \leq 0$.)



Svar: Låt $A = 4e^{-1/2}$ och $B = 9e^{1/3}$. Ekvationen $(x + 6)e^{1/x} = k$ har två lösningar om $0 < k < A$ eller $k > B$, den har en lösning om $k \leq 0$ eller $k = A$ eller $k = B$, och den saknar lösning om $A < k < B$.

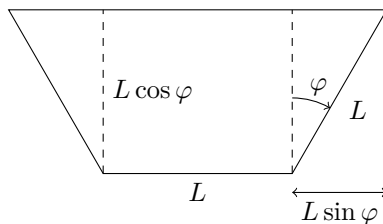
(Anm.: Det är underförstått att resonemanget bygger på satsen om mellanliggande värde, som ju garanterar att den kontinuerliga funktionen $f(x)$ verkligen antar de värden som indikeras av grafen.)

5. Med beteckningar enligt nedanstående figur söker vi maximum av arean

$$A(\varphi) = (L + L \sin \varphi)L \cos \varphi = L^2 \underbrace{(\cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi)}_{f(\varphi)}$$

då vinkeln φ kan antas ligga i intervallet $0 \leq \varphi < \pi/2$; det är ju uppenbart att varje vinkel i intervallet $-\pi/6 < \varphi < 0$ ger ett parallelltrapets med *mindre* area än för motsvarande positiva vinkel.

(Alternativt, kalla sträckan $L \sin \varphi$ för x , så att $L \cos \varphi$ blir $\sqrt{L^2 - x^2}$, och maximera $A(x) = (x + L)\sqrt{L^2 - x^2}$ för $0 \leq x < L$.)



Funktionen $f(\varphi) = \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi$ antar sina extremvärden i intervallet $[0, \pi/2]$ antingen i ändpunkterna (dvs. $f(0) = 1$ resp. $f(\pi/2) = 0$) eller där

derivatan

$$f'(\varphi) = -\sin \varphi + \cos 2\varphi = -\sin \varphi + 1 - 2\sin^2 \varphi = -(2\sin \varphi - 1)(\sin \varphi + 1)$$

är noll, vilket i det aktuella intervallet bara inträffar när $\varphi = \pi/6$. Värdet där,

$$f(\pi/6) = \cos \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

är större än ändpunktsvärdena, och är därmed funktionens största värde i intervallet $[0, \pi/2]$ (och då även i intervallet $[0, \pi/2[$ såklart).

Svar: Den största möjliga arean är $3\sqrt{3}L^2/4$.

6. Låt $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$ för $x > 0$. Detta är en avtagande och positiv funktion, så (rita figur!)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3 + k} &= \sum_{k=1}^n f(k) \\ &\leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_1^n \\ &= \frac{1}{2} + \ln n - \frac{1}{2} \ln(n^2 + 1) - (\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \ln 2 + \underbrace{\ln(n^2) - \ln(n^2 + 1)}}_{< 0, \text{ ty } \ln \text{ är str. väx.}} \\ &< \frac{1}{2}(1 + \ln 2), \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

7. Sätt $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ för $0 < x < 1$; då är

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 2 \quad \text{för } 0 < x < 1. \quad (*)$$

Låt nu $0 < a < b < 1$; då gäller

$$\ln \frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)} = \ln \frac{1+b}{1-b} - \ln \frac{1+a}{1-a} = f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a),$$

för något tal $\xi \in]a, b[$, enligt medelvärdessatsen för derivator. Enligt (*) är $f'(\xi) > 2$, så

$$\ln \frac{(1-a)(1+b)}{(1+a)(1-b)} = f'(\xi) \cdot (b-a) > 2(b-a),$$

vilket skulle visas.