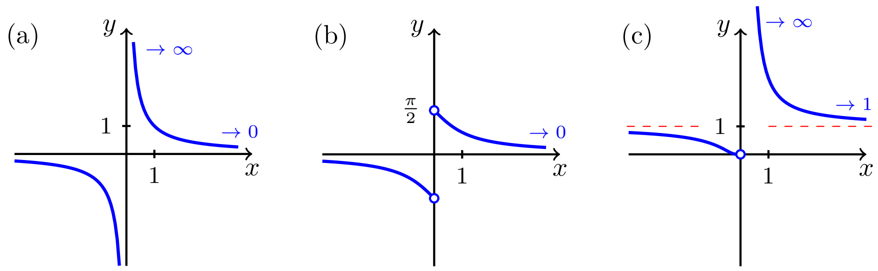
Lösningsskisser för TATA41 2017-04-19

1. Definitionsmängden är $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$ i alla tre fallen. Uppenbart udda funktioner i (a) och (b), uppenbart positiv funktion i (c).



2. (a) $\frac{\sin(x+2)}{x^2-x-6} = \frac{\sin(x+2)}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} \to 1 \cdot \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$ då $x \to -2$, enligt ett standardgränsvärde.

   (b) $\sqrt{x^2+5x} - x = \frac{(x^2+5x)-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x} = [\text{för } x > 0] = \frac{5}{\sqrt{1+5x^{-1}}+1} \to \frac{5}{2}$ då $x \to \infty$.

   (c) $\sqrt{x^2+5x} - x = |x|\,\sqrt{1+5x^{-1}} + (-x) \to \infty$ då $x \to -\infty$. (Typ "$\infty + \infty$".)

   Svar: (a) $-1/5$ (b) $5/2$ (c) ∞

3. (a) $\int \frac{x^2+x+3}{4+x^2}\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{4+x^2}\right) dx = x + \frac{1}{2}\ln(4+x^2) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$.

   (b) Bytet $t = \sqrt{x}$ följt av partiell integration ger $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int 2t\sin t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$.

   (c) Ex. 5.32 i kursboken (Forsling–Neymark) visar $\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$ (för $x \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, där det som vanligt är underförstått att C kan ha olika värden i olika intervall $n\pi < x < (n+1)\pi$).

   Alternativ: variabelbytet $t = \tan\frac{x}{2}$ (jfr. Ex. 5.35) ger $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$, vilket är samma sak, eftersom $\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{2} = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

   (Varning: se upp så att du inte skriver $\ln(\cos x - 1)$ någonstans, för det uttrycket är ju odefinierat för alla $x \in \mathbf{R}$! Däremot går $\ln|\cos x - 1| = \ln(1-\cos x)$ bra; det är bara odefinierat i punkter där redan integranden $\frac{1}{\sin x}$ är odefinierad.)

   Svar: Se ovan.

4. Partiell integration och sedan partialbråksuppdelning ger (för $x > 0$)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx &= -\frac{\ln(1+2x)}{x} + \int \frac{2\,dx}{(1+2x)x} \\ &= -\frac{\ln(1+2x)}{x} + \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{1+2x}\right) dx \\ &= -\frac{\ln(1+2x)}{x} + 2\ln x - 2\ln(1+2x) + C \\ &= -\frac{\ln(1+2x)}{x} - 2\ln(2+\tfrac{1}{x}) + C,\end{aligned}$$

   vilket medför att

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{\ln(1+2\omega)}{\omega} - 2\ln(2+\tfrac{1}{\omega})\right) + \frac{\ln 5}{2} + 2\ln\tfrac{5}{2} \\ &= 0 - 2\ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln 5 + 2(\ln 5 - \ln 2) = \frac{5}{2}\ln 5 - 4\ln 2.\end{aligned}$$

(Eller $\ln(25\sqrt{5}/16)$ om man vill, så att man ser att svaret blir positivt, vilket det måste bli eftersom integranden $\ln(1+2x)/x^2$ är positiv.)

Att gränsvärdet av den första termen blir noll motiveras med användning av standardgränsvärdet $\ln t/t \to 0$ då $t \to \infty$, t.ex. såhär:

$$\frac{\ln(1+2\omega)}{\omega} = \frac{\ln \omega}{\omega} + \frac{1}{\omega} \cdot \ln\Bigl(\frac{1}{\omega} + 2\Bigr) \to 0 + 0 \cdot \ln(0+2) = 0, \quad \text{då } \omega \to \infty.$$

Eller såhär:

$$\frac{\ln(1+2\omega)}{\omega} = \frac{\ln(1+2\omega)}{1+2\omega} \cdot \frac{1+2\omega}{\omega} = \frac{\ln(1+2\omega)}{1+2\omega} \cdot \left(\frac{1}{\omega} + 2\right) \to 0 \cdot (0+2) = 0.$$

Svar: Integralen är konvergent och har värdet $\frac{5}{2}\ln 5 - 4\ln 2 = \ln(25\sqrt{5}/16)$.

5. **Svar**: Alla tre påståendena är **falska**.

   T.ex. visar $f(x) = x$ att (a) är falskt, och det finns många välbekanta funktioner som motsäger både (a) och (b), exempelvis $f(x) = \sqrt{x}$ och $f(x) = \ln x$.

   Att hitta ett motexempel till (c) kräver lite mera fantasi, men om t.ex.

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

   så gäller $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (eftersom $\sin(x^2)$ är begränsad och $1/x \to 0$), medan $f'(x) = 2\cos(x^2) - x^{-2}\sin(x^2)$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$.

6. Eftersom $x = 0$ inte är en lösning så är ekvationen $e^x = kx$ ekvivalent med

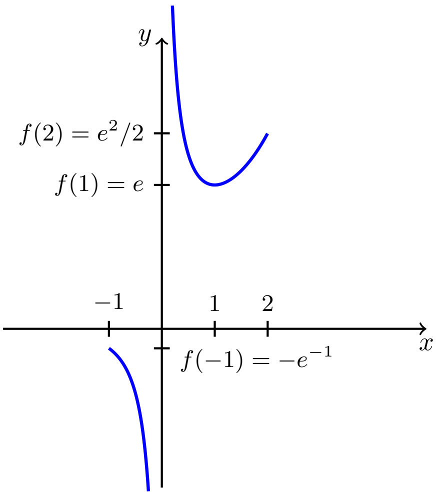
$$f(x) = k, \quad \text{där} \quad f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0.$$

   Derivatan $f'(x) = (x-1)\,e^x/x^2$ ger följande teckentabell:

x		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
e^x	$+$		$+$		$+$
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

   För att kunna rita upp den del av kurvan $y = f(x)$ som ligger i remsan $-1 \leq x \leq 2$ behöver vi också notera att $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$ (eftersom $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ och $e^x \to 1 > 0$).

   Antalet lösningar till $f(x) = k$ i intervallet $[-1, 2]$ avläses sedan genom att räkna antalet skärningar mellan linjen $y = k$ och kurvan $y = f(x)$, $x \in [-1, 2]$.



Svar: Ekvationen har två lösningar (i det givna intervallet $-1 \leq x \leq 2$) ifall $e < k \leq e^2/2$. Den har en lösning om $k > e^2/2$ eller $k = e$ eller $k \leq -e^{-1}$. Den har inga lösningar om $-e^{-1} < k < e$.

7. (a) I integrationsintervallet $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ antar $\cos x$ alla värden mellan 0 och 1, så integranden $\sqrt{1 - \cos x}$ antar alla värden mellan $\sqrt{1-0} = 1$ och $\sqrt{1-1} = 0$. Högsta möjliga undertrappan till $\sqrt{1 - \cos x}$ på detta intervall, med ett enda trappsteg, ligger alltså på höjden 0, och lägsta möjliga övertrappan ligger på höjden 1. Eftersom intervallets längd är $\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{6}$ fås därmed uppskattningen

$$0 \leq I \leq \frac{5\pi}{6}.$$

(b) Omskrivningen $\cos x = \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ ger

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos x}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{2\sin^2 \tfrac{x}{2}}\, dx = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \left|\sin \tfrac{x}{2}\right|\, dx \\ &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{0} (-\sin \tfrac{x}{2})\, dx + \sqrt{2} \int_{0}^{\pi/3} \sin \tfrac{x}{2}\, dx \\ &= \sqrt{2}\Big[2\cos \tfrac{x}{2}\Big]_{-\pi/2}^{0} - \sqrt{2}\Big[2\cos \tfrac{x}{2}\Big]_{0}^{\pi/3} \\ &= 2\sqrt{2}\big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) - 2\sqrt{2}\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\big) \\ &= 4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

(Alternativ metod: förläng med $\sqrt{1 + \cos x}$.)

Svar: (a) $0 \leq I \leq 5\pi/6$ (b) $I = 4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6}$

(Rimlighetskontroll: $4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6} \approx 4 \cdot 1{,}4 - 2 - 2{,}4 = 1{,}2$, vilket är uppenbart större än vår undre gräns 0, och även klart mindre än vår övre gräns $\frac{5\pi}{6}$, som ju är drygt $\frac{5 \cdot 3}{6} = 2{,}5$.)