Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-04-19 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen $y = f(x)$ för följande funktioner:

   (a) $f(x) = 1/x$ (b) $f(x) = \arctan(1/x)$ (c) $f(x) = e^{1/x}$

   Obs! Just på denna uppgift ska **enbart svar** lämnas in, **inga motiveringar eller uträkningar**. Rita tydligt så att definitionsmängd, relevanta gränsvärden, samt eventuella lokala extrempunkter framgår i figuren. (Det går även bra att skriva upp det bredvid ifall du tycker att det behövs för tydlighets skull. Asymptoter behöver ej anges.)

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 - x - 6}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$

3. Beräkna följande integraler:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{4+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx$ (eller visa att den är divergent).

5. Antag att $f(x)$ är deriverbar för $x > 0$. Är nedanstående påståenden sanna eller falska, då $x \to \infty$? (Ge ett bevis eller ett tydligt motexempel i varje deluppgift.)

   (a) Om $f(x) \to \infty$ så måste $f'(x) \to \infty$.
   (b) Om $f'(x) \to 0$ så måste $f(x) \to L$ för något $L \in \mathbf{R}$.
   (c) Om $f(x) \to L$ för något $L \in \mathbf{R}$ så måste $f'(x) \to 0$.

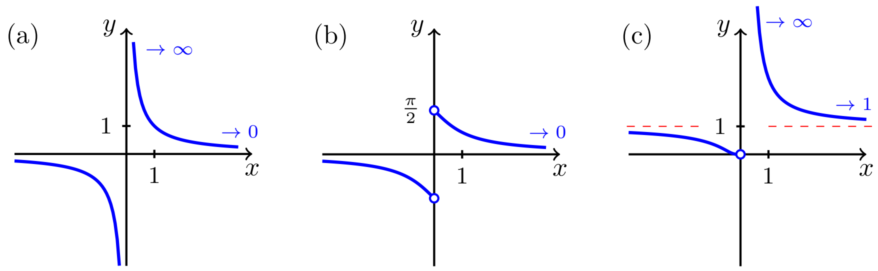
6. Hur många reella lösningar i intervallet $-1 \le x \le 2$ har ekvationen $e^x = kx$ för olika värden på konstanten $k \in \mathbf{R}$?

7. Låt $I = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{1 - \cos x}\,dx$.

   (a) Vilken uppskattning $A \le I \le B$ får man från (bästa tänkbara) under- och övertrappor med bara ett enda trappsteg? (1p)
   (b) Beräkna I. (2p)

Lösningsskisser för TATA41 2017-04-19

1. Definitionsmängden är $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$ i alla tre fallen. Uppenbart udda funktioner i (a) och (b), uppenbart positiv funktion i (c).



2. (a) $\frac{\sin(x+2)}{x^2-x-6} = \frac{\sin(x+2)}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} \to 1 \cdot \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$ då $x \to -2$, enligt ett standardgränsvärde.

   (b) $\sqrt{x^2+5x} - x = \frac{(x^2+5x)-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x} = [\text{för } x > 0] = \frac{5}{\sqrt{1+5x^{-1}}+1} \to \frac{5}{2}$ då $x \to \infty$.

   (c) $\sqrt{x^2+5x} - x = |x|\sqrt{1+5x^{-1}} + (-x) \to \infty$ då $x \to -\infty$. (Typ "$\infty + \infty$".)

   Svar: (a) $-1/5$ (b) $5/2$ (c) ∞

3. (a) $\int \frac{x^2+x+3}{4+x^2}\,dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{4+x^2}\right) dx = x + \frac{1}{2}\ln(4+x^2) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$.

   (b) Bytet $t = \sqrt{x}$ följt av partiell integration ger $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int 2t\sin t\,dt = -2t\cos t + 2\sin t + C = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$.

   (c) Ex. 5.32 i kursboken (Forsling–Neymark) visar $\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$ (för $x \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, där det som vanligt är underförstått att C kan ha olika värden i olika intervall $n\pi < x < (n+1)\pi$).

   Alternativ: variabelbytet $t = \tan\frac{x}{2}$ (jfr. Ex. 5.35) ger $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$, vilket är samma sak, eftersom $\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2t^2}{2} = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

   (Varning: se upp så att du inte skriver $\ln(\cos x - 1)$ någonstans, för det uttrycket är ju odefinierat för alla $x \in \mathbf{R}$! Däremot går $\ln|\cos x - 1| = \ln(1-\cos x)$ bra; det är bara odefinierat i punkter där redan integranden $\frac{1}{\sin x}$ är odefinierad.)

   Svar: Se ovan.

4. Partiell integration och sedan partialbråksuppdelning ger (för $x > 0$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx &= -\frac{\ln(1+2x)}{x} + \int \frac{2\,dx}{(1+2x)x} \\
&= -\frac{\ln(1+2x)}{x} + \int \left(\frac{2}{x} - \frac{4}{1+2x}\right) dx \\
&= -\frac{\ln(1+2x)}{x} + 2\ln x - 2\ln(1+2x) + C \\
&= -\frac{\ln(1+2x)}{x} - 2\ln(2+\tfrac{1}{x}) + C,
\end{aligned}$$

   vilket medför att

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,dx &= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{\ln(1+2\omega)}{\omega} - 2\ln(2+\tfrac{1}{\omega})\right) + \frac{\ln 5}{2} + 2\ln\tfrac{5}{2} \\
&= 0 - 2\ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln 5 + 2(\ln 5 - \ln 2) = \frac{5}{2}\ln 5 - 4\ln 2.
\end{aligned}$$

(Eller $\ln(25\sqrt{5}/16)$ om man vill, så att man ser att svaret blir positivt, vilket det måste bli eftersom integranden $\ln(1+2x)/x^2$ är positiv.)

Att gränsvärdet av den första termen blir noll motiveras med användning av standardgränsvärdet $\ln t/t \to 0$ då $t \to \infty$, t.ex. såhär:

$$\frac{\ln(1+2\omega)}{\omega} = \frac{\ln \omega}{\omega} + \frac{1}{\omega} \cdot \ln\Big(\frac{1}{\omega} + 2\Big) \to 0 + 0 \cdot \ln(0+2) = 0, \quad \text{då } \omega \to \infty.$$

Eller såhär:

$$\frac{\ln(1+2\omega)}{\omega} = \frac{\ln(1+2\omega)}{1+2\omega} \cdot \frac{1+2\omega}{\omega} = \frac{\ln(1+2\omega)}{1+2\omega} \cdot \left(\frac{1}{\omega} + 2\right) \to 0 \cdot (0+2) = 0.$$

Svar: Integralen är konvergent och har värdet $\frac{5}{2}\ln 5 - 4\ln 2 = \ln(25\sqrt{5}/16)$.

5. **Svar**: Alla tre påståendena är **falska**.

   T.ex. visar $f(x) = x$ att (a) är falskt, och det finns många välbekanta funktioner som motsäger både (a) och (b), exempelvis $f(x) = \sqrt{x}$ och $f(x) = \ln x$.

   Att hitta ett motexempel till (c) kräver lite mera fantasi, men om t.ex.

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

   så gäller $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ (eftersom $\sin(x^2)$ är begränsad och $1/x \to 0$), medan $f'(x) = 2\cos(x^2) - x^{-2}\sin(x^2)$ saknar gränsvärde då $x \to \infty$.

6. Eftersom $x = 0$ inte är en lösning så är ekvationen $e^x = kx$ ekvivalent med

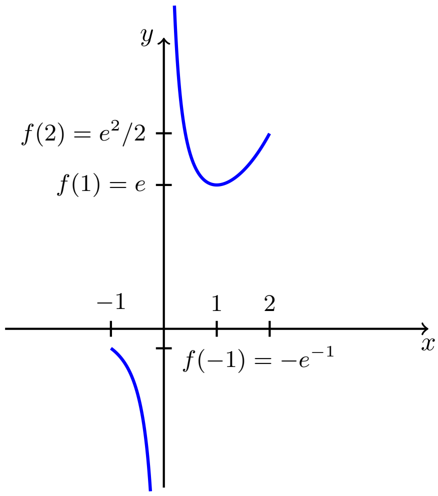
$$f(x) = k, \quad \text{där} \quad f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0.$$

   Derivatan $f'(x) = (x-1)\,e^x/x^2$ ger följande teckentabell:

x		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
e^x	$+$		$+$		$+$
x^2	$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

   För att kunna rita upp den del av kurvan $y = f(x)$ som ligger i remsan $-1 \leq x \leq 2$ behöver vi också notera att $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$ (eftersom $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ och $e^x \to 1 > 0$).

   Antalet lösningar till $f(x) = k$ i intervallet $[-1, 2]$ avläses sedan genom att räkna antalet skärningar mellan linjen $y = k$ och kurvan $y = f(x)$, $x \in [-1, 2]$.



Svar: Ekvationen har två lösningar (i det givna intervallet $-1 \le x \le 2$) ifall $e < k \le e^2/2$. Den har en lösning om $k > e^2/2$ eller $k = e$ eller $k \le -e^{-1}$. Den har inga lösningar om $-e^{-1} < k < e$.

7. (a) I integrationsintervallet $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{3}$ antar $\cos x$ alla värden mellan 0 och 1, så integranden $\sqrt{1-\cos x}$ antar alla värden mellan $\sqrt{1-0} = 1$ och $\sqrt{1-1} = 0$. Högsta möjliga undertrappan till $\sqrt{1-\cos x}$ på detta intervall, med ett enda trappsteg, ligger alltså på höjden 0, och lägsta möjliga övertrappan ligger på höjden 1. Eftersom intervallets längd är $\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{5\pi}{6}$ fås därmed uppskattningen

$$0 \le I \le \frac{5\pi}{6}.$$

(b) Omskrivningen $\cos x = \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ ger

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{1-\cos x}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{2\sin^2 \tfrac{x}{2}}\, dx = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/3} \left|\sin \tfrac{x}{2}\right|\, dx \\
&= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{0} (-\sin \tfrac{x}{2})\, dx + \sqrt{2} \int_{0}^{\pi/3} \sin \tfrac{x}{2}\, dx \\
&= \sqrt{2} \Big[2\cos \tfrac{x}{2}\Big]_{-\pi/2}^{0} - \sqrt{2} \Big[2\cos \tfrac{x}{2}\Big]_{0}^{\pi/3} \\
&= 2\sqrt{2}\big(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) - 2\sqrt{2}\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\big) \\
&= 4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6}.
\end{aligned}$$

(Alternativ metod: förläng med $\sqrt{1+\cos x}$.)

Svar: (a) $0 \le I \le 5\pi/6$ (b) $I = 4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6}$

(Rimlighetskontroll: $4\sqrt{2} - 2 - \sqrt{6} \approx 4 \cdot 1{,}4 - 2 - 2{,}4 = 1{,}2$, vilket är uppenbart större än vår undre gräns 0, och även klart mindre än vår övre gräns $\frac{5\pi}{6}$, som ju är drygt $\frac{5 \cdot 3}{6} = 2{,}5$.)