Lösningsskisser för TATA41 2017-03-17

1. Funktionen $f(x) = 5\arctan 2x + 4\arctan(1/x)$, med den föreskrivna definitionsmängden $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$, har derivatan

$$f'(x) = \frac{5 \cdot 2}{1+(2x)^2} + \frac{4 \cdot (-1/x^2)}{1+(1/x)^2} = \frac{10}{1+4x^2} - \frac{4}{x^2+1}$$
$$= \frac{10x^2+10-(4+16x^2)}{(1+x^2)(1+4x^2)} = \frac{6(1-x)(1+x)}{(1+x^2)(1+4x^2)}, \qquad x > 0.$$

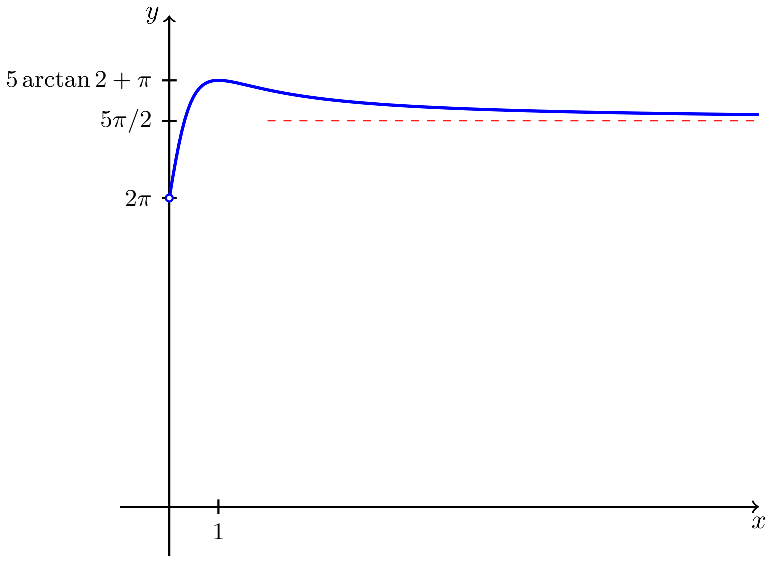
Detta ger följande teckentabell:

x		0		1	
$1-x$		|	$+$	0	$-$
$1+x$	($x \leq 0$ ej relevant)	|	$+$		$+$
$(1+x^2)(1+4x^2)$		|	$+$		$+$
$f'(x)$	ej def.	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	ej def.	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Gränsvärdena

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot 0 = \frac{5\pi}{2}$$

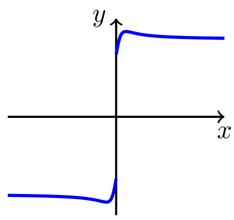
innebär att linjen $y = 5\pi/2$ är en vågrät asymptot till grafen $y = f(x)$; lodräta asymptoter saknas.



Svar: Lokalt maximum $f(1) = 5\arctan 2 + \pi$. Vågrät asymptot $y = 5\pi/2$.

Anm. $f(1)$ är t.o.m. globalt maximum. Funktionen saknar däremot minsta värde.

Anm. Uttrycket för $f(x)$ är meningsfullt även för $x < 0$, så man kan ställa samma fråga med definitionsmängden $x \neq 0$ istället för $x > 0$. I så fall skulle grafen se ut som till höger (en udda funktion, med olika gränsvärden från höger och vänster i origo).



2. Derivatans definition är $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(a) $\dfrac{(x+h)^4 - x^4}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \to 4x^3 + 0 + 0 + 0$ då $h \to 0$.

(b) $\dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \dfrac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} \cdot \dfrac{1}{x} \to 1 \cdot \dfrac{1}{x}$ då $h \to 0$.

(c) $\dfrac{1/\sqrt{x+h} - 1/\sqrt{x}}{h} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} = \dfrac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \to \dfrac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$ då $h \to 0$.

3. Det går bra att t.ex. sätta $t = e^x$, men det blir ännu smidigare såhär:

$$\int_0^\omega \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^\omega \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = \Big[-\ln(e^{-x}+1)\Big]_0^\omega = -\ln(e^{-\omega}+1) + \ln(e^0+1)$$
$$\to -\ln(0+1) + \ln 2 = \ln 2, \qquad \text{då } \omega \to \infty.$$

Svar: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \ln 2.$

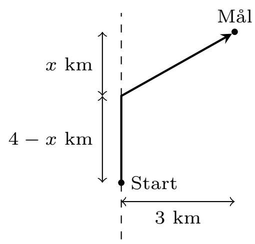
4. (a) $\int_{-2}^0 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_{-2}^0 = \frac{1}{12}(1 - 17\sqrt{17})$.

(b) $\int_0^1 \frac{5}{(x-2)(x^2+1)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1}\right)dx = \Big[\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan x\Big]_0^1 = (\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - 2\cdot\frac{\pi}{4}) - (\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - 2\cdot 0) = -\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

(c) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x/3)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2x/3)}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\sin(2x/3)\right]_0^{2\pi} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Svar: Se ovan.

5. Beteckningar enligt figuren, där vi antar $0 \le x \le 4$. (Det är uppenbart att enbart detta intervall är av intresse, för man tjänar ju inget på att springa en omväg.[1]) Välj tidsenhet så att hastigheten i skogen blir 1 km per tidsenhet; då blir löptiden



$$f(x) = \frac{4-x}{2} + \sqrt{x^2+9}$$

tidsenheter, vilket vi vill minimera. Vi har

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 0 \quad\iff\quad \frac{x^2}{x^2+9} = \frac{1}{4} \text{ och } x \ge 0 \quad\iff\quad x = \sqrt{3}.$$

Extremvärdena på intervallet $[0,4]$ kan bara antas i ändpunkterna eller där derivatan är noll, så det räcker att jämföra funktionens värden i dessa punkter:

$$f(0) = 2 + \sqrt{9} = 5, \qquad f(4) = 0 + \sqrt{25} = 5,$$

samt

$$f(\sqrt{3}) = \frac{4-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3+9} = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{vilket är mindre än } 2 + \frac{3\sqrt{4}}{2} = 5.$$

Det minsta av dessa tre värden är alltså $f(\sqrt{3})$, dvs. $x = \sqrt{3}$ ger minimum.

Svar: Linnea ska springa $4 - \sqrt{3}$ km längs stigen.

[1]Om Linnea springer mer än 4 km norrut längs stigen så blir både stig- och skogssträckan längre än om hon hade svängt av efter 4 km, och om hon springer söderut i början så blir båda sträckorna längre än om hon direkt hade sprungit raka vägen genom skogen.

6. För att kunna hantera $|f'(x)|$ behöver vi veta i vilka intervall som $f'(x)$ är positiv respektive negativ. Derivera $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$, faktorisera och gör teckentabell som vanligt:

$$f'(x) = (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x + 1)(-e^{-x}) = -(x - 1)(x - 4)e^{-x}$$

x		1		4	
$x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - 4$	$-$		$-$	0	$+$
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Detta visar hur integralen ska delas upp, och att räkna ut delintegralerna blir sedan en enkel match eftersom $f(x)$ såklart är en primitiv funktion till $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{5} |f'(x)|\, dx &= \int_{-1}^{1} |f'(x)|\, dx + \int_{1}^{4} |f'(x)|\, dx + \int_{4}^{5} |f'(x)|\, dx \\
&= -\int_{-1}^{1} f'(x)\, dx + \int_{1}^{4} f'(x)\, dx - \int_{4}^{5} f'(x)\, dx \\
&= -\big[f(x)\big]_{-1}^{1} + \big[f(x)\big]_{1}^{4} - \big[f(x)\big]_{4}^{5} \\
&= f(-1) - 2f(1) + 2f(4) - f(5).
\end{aligned}$$

Svar: $5e + 2e^{-1} + 10e^{-4} - 11e^{-5}$.

7. För att komma till ett läge där vi kan åberopa Rolles sats kan vi ”trycka ihop” funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ till en funktion $g\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ som är definierad på ett begränsat intervall istället för på hela $\mathbf{R}$.

   Såhär: sätt

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 17, & x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   Då blir g kontinuerlig ända ut i i intervallets ändpunkter, eftersom

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} g(x) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} f(\tan x) = \lim_{t \to \infty} f(t) = [\text{enl. föruts.}] = 17 = g(\pi/2),$$

   och analogt för intervallets vänstra ändpunkt $-\pi/2$. Vidare är g deriverbar i intervallets inre; kedjeregeln ger

$$g'(x) = f'(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

   Och för det tredje har g samma värde i båda ändpunkterna: $g(\pm\pi/2) = 17$. Därmed uppfyller funktionen g alla förutsättningarna för Rolles sats, som säger att det finns (minst) ett tal $\xi_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sådant att

$$0 = g'(\xi_0) = f'(\tan \xi_0) \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 \xi_0}}_{\neq 0}, \qquad \text{dvs.} \quad f'(\tan \xi_0) = 0.$$

   Genom att sätta $\xi = \tan \xi_0$ erhåller vi därmed ett tal $\xi \in \mathbf{R}$ som uppfyller $f'(\xi) = 0$, som önskat.

Alternativ lösning

Man kan också föra ett resonemang som liknar det i beviset för Rolles sats, men man måste då vara noga med att tydligt förankra alla sina påståenden i andra satser och definitioner från kursen.

Om f är den konstanta funktionen $f(x) = 17$ så är $f'(\xi) = 0$ för alla $\xi \in \mathbf{R}$, och då är vi klara direkt.

I annat fall finns det något tal x_0 sådant att $f(x_0) \neq 17$. Antag först att $f(x_0) > 17$.

Enligt förutsättning är $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 17$. Per definition betyder detta att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega_1 \in \mathbf{R}$ sådant att

$$17 - \varepsilon < f(x) < 17 + \varepsilon \qquad \text{för alla } x < \omega_1.$$

Här är vi egentligen bara intresserade av den högra olikheten $f(x) < 17 + \varepsilon$. Om vi sätter $\varepsilon = f(x_0) - 17 > 0$ så får vi ju ur den olikheten att följande är sant, för något $\omega_1 \in \mathbf{R}$:

$$f(x) < f(x_0) \qquad \text{för alla } x < \omega_1. \tag{1}$$

Notera att eftersom $x = x_0$ uppenbart inte uppfyller olikheten i (1) så kan inte $x_0 < \omega_1$ vara sant; alltså är $\omega_1 \leq x_0$.

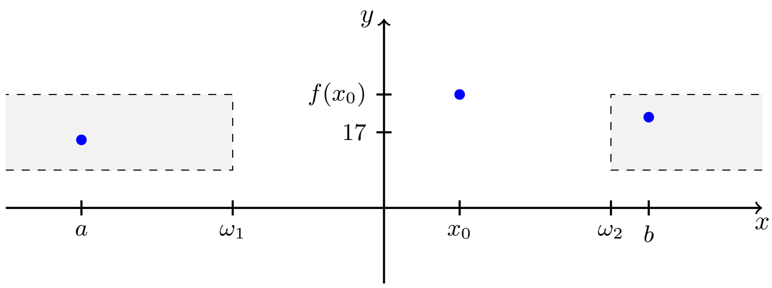
På samma sätt innebär $\lim_{x \to \infty} f(x) = 17$ att det finns ett $\omega_2 \in \mathbf{R}$ sådant att

$$f(x) < f(x_0) \qquad \text{för alla } x > \omega_2, \tag{2}$$

vilket speciellt medför att $x_0 \leq \omega_2$. Sammantaget har vi därmed

$$\omega_1 \leq x_0 \leq \omega_2. \tag{3}$$

Låt nu a och b vara två tal sådana att $a < \omega_1 \leq \omega_2 < b$; enligt (3) måste då x_0 ligga strikt mellan a och b, och enligt (1) resp. (2) måste både $f(a)$ och $f(b)$ vara strikt mindre än $f(x_0)$.



Nu kan vi tillämpa satsen om största och minsta värde: f:s restriktion till intervallet $[a, b]$ är en kontinuerlig funktion (eftersom f enligt förutsättning är deriverbar, och därmed kontinuerlig, på hela $\mathbf{R}$), och har därmed ett största värde. Vi vet dessutom att inget av ändpunktsvärdena $f(a)$ och $f(b)$ kan vara störst, eftersom det finns en punkt $x_0 \in \,]a, b[$ där värdet $f(x_0)$ är större. Alltså antar f sitt maximum på $[a, b]$ i en *inre* punkt ξ, dvs. en punkt sådan att $a < \xi < b$. Och vi har ju en annan sats som säger att derivatan i en sådan punkt måste vara noll (om den existerar, vilket den gör i alla punkter enligt förutsättning). Alltså $f'(\xi) = 0$, som önskat.

(När vi ska åberopa satsen om största och minsta värde måste vi specificera vilket intervall $[a, b]$ vi använder, och hela syftet med ovanstående resonemang var att hitta ett intervall där vi är garanterade att största värdet *inte* antas i en ändpunkt. För om t.ex. $f(a)$ vore det största värdet på $[a, b]$ så skulle det inte gå att dra slutsatsen att $f'(a) = 0$.)

[Alternativt, ta ett tal C strikt mellan $\max\big(f(a), f(b)\big)$ och $f(x_0)$ och åberopa satsen om mellanliggande värde (två gånger) för att få punkter A och B sådana att $a < A < x_0 < B < b$ och $f(A) = f(B) = C$, och använd sedan Rolles sats på intervallet $[A, B]$.]

Fallet $f(x_0) < 17$ behandlas på motsvarande sätt.

Argument som inte fungerar

Det kan också vara lärorikt att titta på några andra argument som inte riktigt håller.

En idé är att tillämpa medelvärdessatsen på ett godtyckligt intervall $[a, b]$, såhär: ”Om $a < b$ finns det ett ξ mellan a och b sådant att

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Om man låter $a \to -\infty$ och $b \to \infty$ så kommer högerledet att gå mot noll:

$$\frac{1}{b - a} \cdot \big(f(b) - f(a)\big) \to 0 \cdot (17 - 17) = 0.$$

Detta ger i vänsterledet att även $f'(\xi) \to 0$, så det finns ett ξ_0 med $f'(\xi_0) = 0$.”

Ett problem med detta är att vi inte har definierat i kursen vad det egentligen innebär att samtidigt låta två variabler gå mot någonting, men det finns även allvarligare brister. Talet ξ beror på a och b, men man har ingen kontroll över *hur* ξ det beror på a och b, så hur vet man att ξ konvergerar mot något tal ξ_0 när $a \to -\infty$ och $b \to \infty$? Och även om man skulle veta det, hur vet man att $f'(\xi_0) \overset{?}{=} \lim_{\xi \to \xi_0} f'(\xi) = 0$? (Det finns *inte* någon förutsättning i uppgiften om att *derivatan* f' måste vara en kontinuerlig funktion.) Och värst av allt: argumentet beror inte på att de två gränsvärdena i $\pm\infty$ är *lika*! Allting skulle bli precis likadant om förutsättningen vore att $f(x) \to A$ då $x \to -\infty$ och $f(x) \to B$ då $x \to \infty$, för även om $A \neq B$ så får man ju $0 \cdot (B - A) = 0$. Och då är det ju uppenbart inte sant att derivatan måste vara noll någonstans; ta t.ex. $f(x) = \arctan x$ som motexempel. [Man kan försvaga förutsättningarna ytterligare, och bara anta att f är *begränsad* på $\mathbf{R}$. Vad ovanstående argument då visar, om man stramar upp det lite, är att det för varje $\varepsilon > 0$ finns någon punkt ξ där $|f'(\xi)| < \varepsilon$.]

En annan idé är följande motsägelsebevis: ”Antag att f' aldrig är noll. Om f' vore positiv överallt så skulle f vara strängt växande, men så kan det inte vara ifall $f(x) \to 17$ då $x \to \pm\infty$ (om man tänker efter lite). Likaså om f' vore negativ överallt. Alltså måste f' anta både positiva och negativa värden. Någonstans däremellan, där f 'byter lutning', måste (väl?) f' vara noll, vilket motsäger antagandet att f' aldrig var noll.”

Det enda problemet med detta argument ligger i den sista meningen. Som vi nämnde ovan behöver f' inte vara kontinuerlig, så man kan *inte* tillämpa satsen om mellanliggande värde för att rigoröst motivera att det verkligen finns ett $\xi \in \mathbf{R}$ där $f'(\xi) = 0$. Det finns dock en *annan* sats, Darboux' sats, som säger att en derivata f' som är definierad i alla punkter i ett intervall alltid måste anta mellanliggande värden. Så det sista påståendet – ”$f'(a) > 0$ och $f'(b) < 0$ medför $f'(\xi) = 0$ för något ξ mellan a och b” – är faktiskt sant, men för att rättfärdiga det måste man hänvisa till en icketrivial sats som inte har tagits upp i kursen. (Eller bevisa den satsen ”från scratch” med hjälp av de satser vi har gått igenom.)