

## Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-03-17 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg  $n$  räcker  $4(n - 1)$  poäng och  $n$  godkända uppgifter ( $n = 3, 4, 5$ ). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Låt  $f(x) = 5 \arctan 2x + 4 \arctan(1/x)$  för  $x > 0$ . Rita grafen  $y = f(x)$  och ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Härled derivatan av nedanstående funktioner, direkt ur definitionen av derivata. (Standardgränsvärden får naturligtvis användas.)

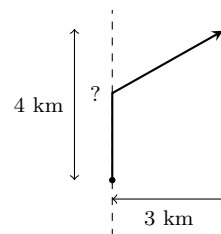
(a)  $f(x) = x^4$       (b)  $f(x) = \ln x, \quad x > 0$       (c)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

3. Beräkna  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + e^x}$  (eller visa divergens).

4. Beräkna följande integraler:

(a)  $\int_{-2}^0 x\sqrt{1 + 4x^2} dx$       (b)  $\int_0^1 \frac{5}{(x - 2)(x^2 + 1)} dx$       (c)  $\int_0^{2\pi} \cos^2(x/3) dx$

5. Orienteraren Linnea står på en skogsstig som går från söder till norr. Hon vill komma till en punkt som ligger 4 km norr och 3 km öster om henne. Hon springer dubbelt så snabbt på stigen som i skogen. Hur långt ska hon springa på stigen innan hon viker av in i skogen, för att komma fram så fort som möjligt?



(Motivera tydligt varför det verkligen blir *snabbaste* vägen.)

6. Beräkna  $\int_{-1}^5 |f'(x)| dx$ , där  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$ .

7. Antag att funktionen  $f$  är deriverbar på  $\mathbf{R}$  och att  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 17$ . Visa att  $f'(\xi) = 0$  för något  $\xi \in \mathbf{R}$ .

## Lösningsskisser för TATA41 2017-03-17

1. Funktionen  $f(x) = 5 \arctan 2x + 4 \arctan(1/x)$ , med den föreskrivna definitionsmängden  $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ , har derivatan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5 \cdot 2}{1 + (2x)^2} + \frac{4 \cdot (-1/x^2)}{1 + (1/x)^2} = \frac{10}{1 + 4x^2} - \frac{4}{x^2 + 1} \\ &= \frac{10x^2 + 10 - (4 + 16x^2)}{(1 + x^2)(1 + 4x^2)} = \frac{6(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)(1 + 4x^2)}, \quad x > 0. \end{aligned}$$

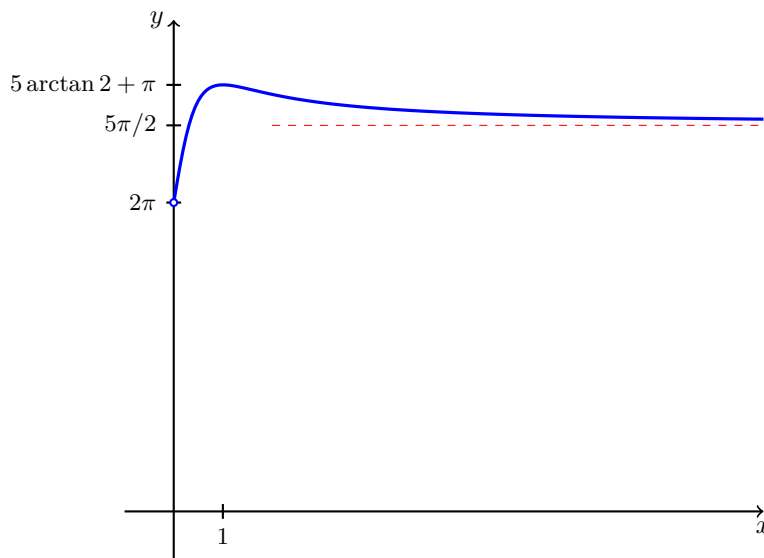
Detta ger följande teckentabell:

$x$		0	1	
$1 - x$			+	0
$1 + x$	$(x \leq 0$ ej relevant)		+	+
$(1 + x^2)(1 + 4x^2)$			+	+
$f'(x)$	ej def.	ej def.	+	0
$f(x)$	ej def.	ej def.	↗	lok. max.

Gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot 0 = \frac{5\pi}{2}$$

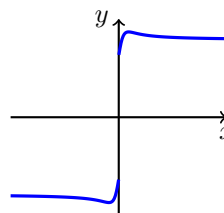
innebär att linjen  $y = 5\pi/2$  är en vågrät asymptot till grafen  $y = f(x)$ ; lodräta asymptoter saknas.



**Svar:** Lokalt maximum  $f(1) = 5 \arctan 2 + \pi$ . Vågrät asymptot  $y = 5\pi/2$ .

**Anm.**  $f(1)$  är t.o.m. globalt maximum. Funktionen saknar däremot minsta värde.

**Anm.** Uttrycket för  $f(x)$  är meningsfullt även för  $x < 0$ , så man kan ställa samma fråga med definitionsmängden  $x \neq 0$  istället för  $x > 0$ . I så fall skulle grafen se ut som till höger (en udda funktion, med olika gränsvärden från höger och vänster i origo).



2. Derivatans definition är  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .

(a)  $\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 \rightarrow 4x^3 + 0 + 0 + 0$  då  $h \rightarrow 0$ .

(b)  $\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h/x} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{x}$  då  $h \rightarrow 0$ .

(c)  $\frac{1/\sqrt{x+h} - 1/\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}} = \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}$   
 $= \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x})} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$  då  $h \rightarrow 0$ .

3. Det går bra att t.ex. sätta  $t = e^x$ , men det blir ännu smidigare såhär:

$$\int_0^\omega \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^\omega \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} = \left[ -\ln(e^{-x} + 1) \right]_0^\omega = -\ln(e^{-\omega} + 1) + \ln(e^0 + 1)$$

$$\rightarrow -\ln(0 + 1) + \ln 2 = \ln 2, \quad \text{då } \omega \rightarrow \infty.$$

**Svar:**  $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \ln 2$ .

4. (a)  $\int_{-2}^0 x\sqrt{1+4x^2} dx = \left[ \frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2} \right]_{-2}^0 = \frac{1}{12}(1 - 17\sqrt{17})$ .

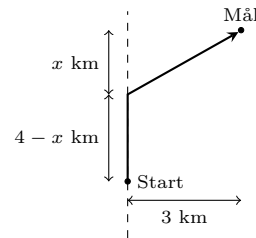
(b)  $\int_0^1 \frac{5}{(x-2)(x^2+1)} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} \right) dx = \left[ \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x \right]_0^1$   
 $= (\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4}) - (\ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - 2 \cdot 0) = -\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{2}$ .

(c)  $\int_0^{2\pi} \cos^2(x/3) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2x/3)}{2} dx = \left[ \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \sin(2x/3) \right]_0^{2\pi} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

**Svar:** Se ovan.

5. Beteckningar enligt figuren, där vi antar  $0 \leq x \leq 4$ . (Det är uppenbart att enbart detta intervall är av intresse, för man tjänar ju inget på att springa en omväg.<sup>1</sup>) Välj tidsenhet så att hastigheten i skogen blir 1 km per tidsenhet; då blir löptiden

$$f(x) = \frac{4-x}{2} + \sqrt{x^2+9}$$



tidsenheter, vilket vi vill minimera. Vi har

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 0 \iff \frac{x^2}{x^2+9} = \frac{1}{4} \text{ och } x \geq 0 \iff x = \sqrt{3}.$$

Extremvärdena på intervallet  $[0, 4]$  kan bara antas i ändpunkterna eller där derivatan är noll, så det räcker att jämföra funktionens värden i dessa punkter:

$$f(0) = 2 + \sqrt{9} = 5, \quad f(4) = 0 + \sqrt{25} = 5,$$

samt

$$f(\sqrt{3}) = \frac{4-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3+9} = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \text{vilket är mindre än } 2 + \frac{3\sqrt{4}}{2} = 5.$$

Det minsta av dessa tre värden är alltså  $f(\sqrt{3})$ , dvs.  $x = \sqrt{3}$  ger minimum.

**Svar:** Linnea ska springa  $4 - \sqrt{3}$  km längs stigen.

<sup>1</sup>Om Linnea springer mer än 4 km norrut längs stigen så blir både stig- och skogssträckan längre än om hon hade svängt av efter 4 km, och om hon springer söderut i början så blir båda sträckorna längre än om hon direkt hade sprungit raka vägen genom skogen.

6. För att kunna hantera  $|f'(x)|$  behöver vi veta i vilka intervall som  $f'(x)$  är positiv respektive negativ. Derivera  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$ , faktorisera och gör teckentabell som vanligt:

$$f'(x) = (2x - 3)e^{-x} + (x^2 - 3x + 1)(-e^{-x}) = -(x - 1)(x - 4)e^{-x}$$

$x$	1	4			
$x - 1$	-	0	+	+	
$x - 4$	-	-	0	+	
$-e^{-x}$	-	-	-	-	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

Detta visar hur integralen ska delas upp, och att räkna ut delintegralerna blir sedan en enkel match eftersom  $f(x)$  såklart är en primitiv funktion till  $f'(x)$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 |f'(x)| dx &= \int_{-1}^1 |f'(x)| dx + \int_1^4 |f'(x)| dx + \int_4^5 |f'(x)| dx \\ &= - \int_{-1}^1 f'(x) dx + \int_1^4 f'(x) dx - \int_4^5 f'(x) dx \\ &= -[f(x)]_{-1}^1 + [f(x)]_1^4 - [f(x)]_4^5 \\ &= f(-1) - 2f(1) + 2f(4) - f(5). \end{aligned}$$

**Svar:**  $5e + 2e^{-1} + 10e^{-4} - 11e^{-5}$ .

7. För att komma till ett läge där vi kan åberopa Rolles sats kan vi "trycka ihop" funktionen  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  till en funktion  $g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$  som är definierad på ett begränsat intervall istället för på hela  $\mathbf{R}$ .

Såhär: sätt

$$g(x) = \begin{cases} f(\tan x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 17, & x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Då blir  $g$  kontinuerlig ända ut i i intervallets ändpunkter, eftersom

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(\tan x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = [\text{enl. föruts.}] = 17 = g(\pi/2),$$

och analogt för intervallets vänstra ändpunkt  $-\pi/2$ . Vidare är  $g$  deriverbar i intervallets inre; kedjeregeln ger

$$g'(x) = f'(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Och för det tredje har  $g$  samma värde i båda ändpunkterna:  $g(\pm\pi/2) = 17$ . Därmed uppfyller funktionen  $g$  alla förutsättningarna för Rolles sats, som säger att det finns (minst) ett tal  $\xi_0 \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sådant att

$$0 = g'(\xi_0) = f'(\tan \xi_0) \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 \xi_0}}_{\neq 0}, \quad \text{dvs.} \quad f'(\tan \xi_0) = 0.$$

Genom att sätta  $\xi = \tan \xi_0$  erhåller vi därmed ett tal  $\xi \in \mathbf{R}$  som uppfyller  $f'(\xi) = 0$ , som önskat.

### Alternativ lösning

Man kan också föra ett resonemang som liknar det i beviset för Rolles sats, men man måste då vara nogga med att tydligt förankra alla sina påståenden i andra satser och definitioner från kursen.

Om  $f$  är den konstanta funktionen  $f(x) = 17$  så är  $f'(\xi) = 0$  för alla  $\xi \in \mathbf{R}$ , och då är vi klara direkt.

I annat fall finns det något tal  $x_0$  sådant att  $f(x_0) \neq 17$ . Antag först att  $f(x_0) > 17$ .

Enligt förutsättning är  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 17$ . Per definition betyder detta att det för varje  $\varepsilon > 0$  finns ett  $\omega_1 \in \mathbf{R}$  sådant att

$$17 - \varepsilon < f(x) < 17 + \varepsilon \quad \text{för alla } x < \omega_1.$$

Här är vi egentligen bara intresserade av den högra olikheten  $f(x) < 17 + \varepsilon$ . Om vi sätter  $\varepsilon = f(x_0) - 17 > 0$  så får vi ju ur den olikheten att följande är sant, för något  $\omega_1 \in \mathbf{R}$ :

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{för alla } x < \omega_1. \quad (1)$$

Notera att eftersom  $x = x_0$  uppenbart inte uppfyller olikheten i (1) så kan inte  $x_0 < \omega_1$  vara sant; alltså är  $\omega_1 \leq x_0$ .

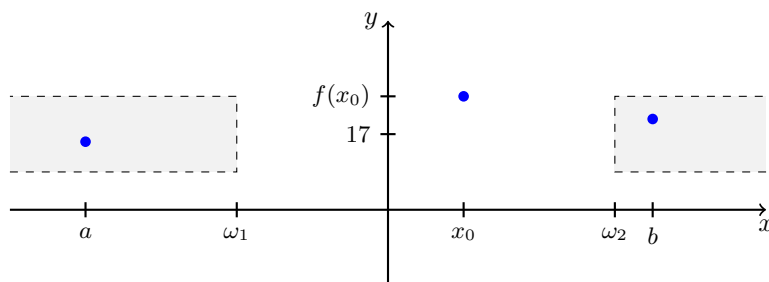
På samma sätt innebär  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 17$  att det finns ett  $\omega_2 \in \mathbf{R}$  sådant att

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{för alla } x > \omega_2, \quad (2)$$

vilket speciellt medför att  $x_0 \leq \omega_2$ . Sammantaget har vi därmed

$$\omega_1 \leq x_0 \leq \omega_2. \quad (3)$$

Låt nu  $a$  och  $b$  vara två tal sådana att  $a < \omega_1 \leq \omega_2 < b$ ; enligt (3) måste då  $x_0$  ligga strikt mellan  $a$  och  $b$ , och enligt (1) resp. (2) måste både  $f(a)$  och  $f(b)$  vara strikt mindre än  $f(x_0)$ .



Nu kan vi tillämpa satsen om största och minsta värde:  $f$ 's restriktion till intervallet  $[a, b]$  är en kontinuerlig funktion (eftersom  $f$  enligt förutsättning är deriverbar, och därmed kontinuerlig, på hela  $\mathbf{R}$ ), och har därmed ett största värde. Vi vet dessutom att inget av ändpunktsvärdena  $f(a)$  och  $f(b)$  kan vara störst, eftersom det finns en punkt  $x_0 \in ]a, b[$  där värdet  $f(x_0)$  är större. Alltså antar  $f$  sitt maximum på  $[a, b]$  i en *inre* punkt  $\xi$ , dvs. en punkt sådan att  $a < \xi < b$ . Och vi har ju en annan sats som säger att derivatan i en sådan punkt måste vara noll (om den existerar, vilket den gör i alla punkter enligt förutsättning). Alltså  $f'(\xi) = 0$ , som önskat.

(När vi ska återopra satsen om största och minsta värde måste vi specificera vilket intervall  $[a, b]$  vi använder, och hela syftet med ovanstående resonemang var att hitta ett intervall där vi är garanterade att största värdet *inte* antas i en ändpunkt. För om t.ex.  $f(a)$  vore det största värdet på  $[a, b]$  så skulle det inte gå att dra slutsatsen att  $f'(a) = 0$ .)

[Alternativt, ta ett tal  $C$  strikt mellan  $\max(f(a), f(b))$  och  $f(x_0)$  och återopra satsen om mellanliggande värde (två gånger) för att få punkter  $A$  och  $B$  sådana att  $a < A < x_0 < B < b$  och  $f(A) = f(B) = C$ , och använd sedan Rolles sats på intervallet  $[A, B]$ .]

Fallet  $f(x_0) < 17$  behandlas på motsvarande sätt.

### Argument som inte fungerar

Det kan också vara lärorikt att titta på några andra argument som inte riktigt håller.

En idé är att tillämpa medelvärdessatsen på ett godtyckligt intervall  $[a, b]$ , såhär: "Om  $a < b$  finns det ett  $\xi$  mellan  $a$  och  $b$  sådant att

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Om man låter  $a \rightarrow -\infty$  och  $b \rightarrow \infty$  så kommer högerledet att gå mot noll:

$$\frac{1}{b - a} \cdot (f(b) - f(a)) \rightarrow 0 \cdot (17 - 17) = 0.$$

Detta ger i vänsterledet att även  $f'(\xi) \rightarrow 0$ , så det finns ett  $\xi_0$  med  $f'(\xi_0) = 0$ ."

Ett problem med detta är att vi inte har definierat i kursen vad det egentligen innebär att samtidigt låta två variabler gå mot någonting, men det finns även allvarligare brister. Talet  $\xi$  beror på  $a$  och  $b$ , men man har ingen kontroll över *hur*  $\xi$  det beror på  $a$  och  $b$ , så hur vet man att  $\xi$  konvergerar mot något tal  $\xi_0$  när  $a \rightarrow -\infty$  och  $b \rightarrow \infty$ ? Och även om man skulle veta det, hur vet man att  $f'(\xi_0) \stackrel{?}{=} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f'(\xi) = 0$ ?

(Det finns *inte* någon förutsättning i uppgiften om att *derivatan*  $f'$  måste vara en kontinuerlig funktion.) Och värst av allt: argumentet beror inte på att de två gränsvärdena i  $\pm\infty$  är *lika*! Allting skulle bli precis likadant om förutsättningen vore att  $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow -\infty$  och  $f(x) \rightarrow B$  då  $x \rightarrow \infty$ , för även om  $A \neq B$  så får man ju  $0 \cdot (B - A) = 0$ . Och då är det ju uppenbart inte sant att derivatan måste vara noll någonstans; ta t.ex.  $f(x) = \arctan x$  som motexempel. [Man kan försvaga förutsättningarna ytterligare, och bara anta att  $f$  är *begränsad* på  $\mathbf{R}$ . Vad ovanstående argument då visar, om man stramar upp det lite, är att det för varje  $\varepsilon > 0$  finns någon punkt  $\xi$  där  $|f'(\xi)| < \varepsilon$ .]

En annan idé är följande motsägelsebevis: "Antag att  $f'$  aldrig är noll. Om  $f'$  vore positiv överallt så skulle  $f$  vara strängt växande, men så kan det inte vara ifall  $f(x) \rightarrow 17$  då  $x \rightarrow \pm\infty$  (om man tänker efter lite). Likaså om  $f'$  vore negativ överallt. Alltså måste  $f'$  anta både positiva och negativa värden. Någonstans däremellan, där  $f$  'byter lutning', måste (väl?)  $f'$  vara noll, vilket motsäger antagandet att  $f'$  aldrig var noll."

Det enda problemet med detta argument ligger i den sista meningen. Som vi nämnade ovan behöver  $f'$  inte vara kontinuerlig, så man kan *inte* tillämpa satsen om mellanliggande värde för att rigoröst motivera att det verkligen finns ett  $\xi \in \mathbf{R}$  där  $f'(\xi) = 0$ . Det finns dock en *annan* sats, Darboux' sats, som säger att en derivata  $f'$  som är definierad i alla punkter i ett intervall alltid måste anta mellanliggande värden. Så det sista påståendet – " $f'(a) > 0$  och  $f'(b) < 0$  medför  $f'(\xi) = 0$  för något  $\xi$  mellan  $a$  och  $b$ " – är faktiskt sant, men för att rättfärdiga det måste man hänvisa till en icketrivial sats som inte har tagits upp i kursen. (Eller bevisa den satsen "från scratch" med hjälp av de satser vi har gått igenom.)