Lösningsskisser för TATA41 2017-01-11

1. Funktionen $f(x) = (\frac{1}{x} - 2)e^{-x}$ är definierad för $x \neq 0$ och har derivatan

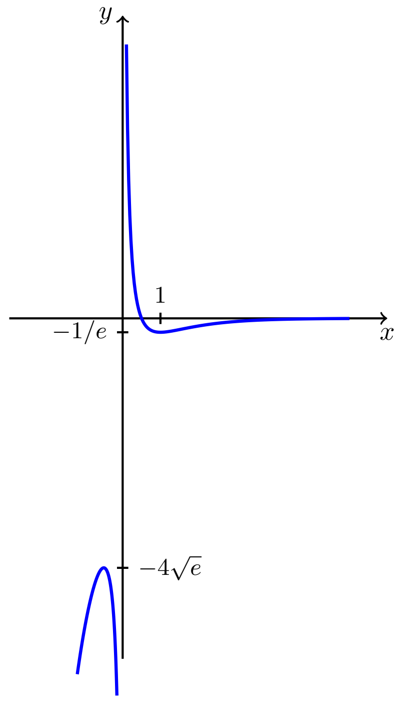
$$f'(x) = \tfrac{-1}{x^2}\, e^{-x} + (\tfrac{1}{x} - 2)(-e^{-x}) = \frac{2e^{-x}(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x^2},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		$-\frac{1}{2}$		0		1	
$x+\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2e^{-x}$	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

De relevanta gränsvärdena är alla tämligen uppenbara om man tittar på vad faktorerna $\frac{1}{x} - 2$ och e^{-x} går mot: $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 0^{\pm}$, $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, samt $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$.

Det är också enkelt att se var $f(x) = (1-2x)e^{-x}/x$ är positivt ($0 < x < \frac{1}{2}$) resp. negativt ($x < 0$ eller $x > \frac{1}{2}$), samt att $f(\frac{1}{2}) = 0$ är det enda nollstället.



Svar: Lokalt maximum $f(-1/2) = -4\sqrt{e}$, lokalt minimum $f(1) = -1/e$. Linjen $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \to \infty$, och linjen $x = 0$ är lodrät asymptot.

2. (a) Det finns många sätt! T.ex. ger identiteten $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ att $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2x \, dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin x \cos^2 x \, dx = [-\frac{2}{3}\cos^3 x]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$.

   (b) Integranden $f(x) = x^7 e^{x^4}$ är en udda funktion, dvs. $f(-x) = -f(x)$, och integrationsintervallet är symmetriskt kring origo, så integralen är lika med noll!

   (Man kan även lösa uppgiften genom att räkna ut den primitiva funktionen – sätt $t = x^4$ – men det är onödigt arbete.)

   (c) $\int \arcsin 2x \, dx = [t = 2x] = \int \frac{1}{2} \arcsin t \, dt = \frac{1}{2}(t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt) = \frac{1}{2}(t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C = x \arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$.

   Svar: Se ovan.

3. Om de två sidorna med budgetgirlangen har längd $x > 0$ så måste de två sidorna med lyxgirlangen ha längd $1/x$ för att arean ska bli 1. Totala girlangvikten (i gram) blir då

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot 2 = 2x + \frac{4}{x}, \qquad x > 0.$$

Ur derivatan

$$f'(x) = 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2}$$

fås en väldigt enkel teckentabell:

x	0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	ej def.	$\searrow$	glob. min.	$\nearrow$

Detta visar att $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ är f:s minsta värde (för $x > 0$).

Svar: Minsta möjliga girlangvikt är $4\sqrt{2}$ gram.

4. (a) Se läroboken.

   (b) Funktionen f är uppenbart kontinuerlig på intervallen $x > 0$ och $x < 0$ (elementära funktioner), så bara punkten $x = 0$ behöver undersökas. Först har vi $f(x) = \arctan(x2^{1/x}) \to \pi/2$ då $x \to 0^+$, eftersom $x2^{1/x} = [t = \frac{1}{x} \to \infty] = \frac{2^t}{t} \to \infty$ (standardgränsvärde). Alltså måste vi ha $f(0) = B = \pi/2$ om f ska kunna vara kontinuerlig. Om $A = 0$ så blir $f(x) = 0$ för alla $x < 0$, och då blir f diskontinuerlig, så vi kan anta $A \neq 0$ och göra uträkningen

$$f(x) = \frac{x \sin Ax}{e^{x^2} - 1} = A \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \cdot \frac{\sin Ax}{Ax} \to A \cdot 1 \cdot 1, \qquad \text{då } x \to 0^-,$$

   vilket måste överensstämma med det tidigare bestämda värdet $f(0) = \pi/2$ för att f ska vara kontinuerlig.

   Svar: $A = B = \pi/2$.

5. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}
\int \frac{8\,dx}{x^3 - x^2 + 3x + 5} &= \int \frac{8\,dx}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} \\
&= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+3}{x^2 - 2x + 5} \right) dx \\
&= \ln|x+1| - \int \frac{(x-1) - 2}{(x-1)^2 + 4}\,dx \\
&= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln\left|(x-1)^2 + 4\right| + \arctan\frac{x-1}{2} + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2 + 4} + \arctan\frac{x-1}{2} + C,
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{8\,dx}{x^3 - x^2 + 3x + 5} &= \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2 + 4} + \arctan\frac{x-1}{2} \right]_1^\omega \\
&= \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{2}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}}{1 - \frac{2}{\omega} + \frac{5}{\omega^2}} + \arctan\frac{\omega - 1}{2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln\frac{4}{4} - \arctan 0 \\
&= 0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 0.
\end{aligned}$$

Svar: $\pi/2$.

6. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Ifall vi tar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ så är

$$\left|(x^2 - 6x) - (-9)\right| = \left|(x-3)^2\right| = |x-3|^2 < \varepsilon$$

för $0 < |x-3| < \delta$, vilket visar att definitionen av $\lim_{x\to 3}(x^2 - 6x) = -9$ är uppfylld.

7. Antag att f och g är kontinuerliga nära a samt att f och fg är deriverbara i a. Under dessa förutsättningar ska vi visa påståendet "$f(a) \neq 0 \implies g'(a)$ existerar", vilket är logiskt ekvivalent med det önskade påståendet "$g'(a)$ existerar inte $\implies f(a) = 0$".

   Antag alltså att $f(a) \neq 0$. Eftersom f är kontinuerlig nära a är då $f(x) \neq 0$ även i någon omgivning av a, så funktionen $h(x) = 1/f(x)$ är definierad där, och deriverbar i a enligt kedjeregeln (eller kvotregeln, om man föredrar det). Produktregeln ger då att $g = (fg) \cdot h$ är deriverbar i a, vilket skulle visas.