

Tentamen i Envariabelanalys 1

2017-01-11 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n - 1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Skissa grafen för $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2\right)e^{-x}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.
2. Beräkna följande bestämda respektive obestämda integraler:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2x \, dx \quad (b) \int_{-1}^1 x^7 e^{x^4} \, dx \quad (c) \int \arcsin 2x \, dx.$$

3. Linus och Linnea ska konstruera en nyårsrektangel som omfattar 1 areaenhet. Kanterna ska kläs med två sorters girlanger. Ett par av motstående sidor pyntas med budgetvarianten som väger 1 gram per längdenhet. Det andra paret draperas i lyxgirlinganger om 2 gram per längdenhet. Vad väger girlangerna på Linus och Linneas rektangel som minst?
4. (a) Definiera vad som menas med att funktionen f är kontinuerlig i punkten a .
(b) Finn konstanter A och B så att följande funktion är kontinuerlig på hela \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin Ax}{e^{x^2} - 1} & \text{om } x < 0, \\ B & \text{om } x = 0, \\ \arctan(x2^{1/x}) & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

5. Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{8}{x^3 - x^2 + 3x + 5} \, dx$ (eller visa att den divergerar).
6. Visa med definitionen av gränsvärde att $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x) = -9$.
7. Antag att funktionerna f och g är kontinuerliga i en omgivning till a och att f och produkten fg är deriverbara i a medan g inte är det. Visa att $f(a) = 0$.

Lösningsskisser för TATA41 2017-01-11

1. Funktionen $f(x) = (\frac{1}{x} - 2)e^{-x}$ är definierad för $x \neq 0$ och har derivatan

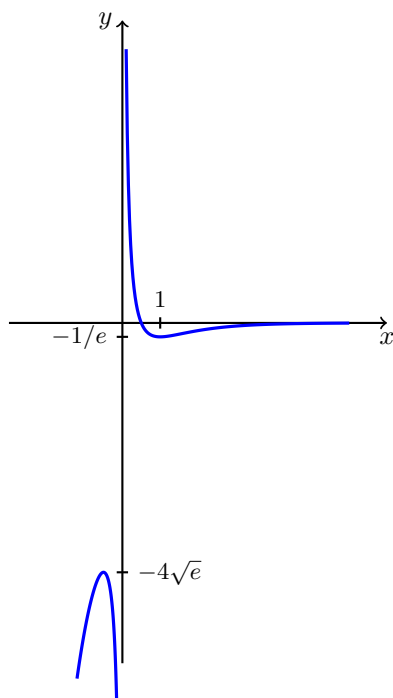
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{-x} + (\frac{1}{x} - 2)(-e^{-x}) = \frac{2e^{-x}(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x^2},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		$-\frac{1}{2}$	0	1			
$x + \frac{1}{2}$	-	0	+	+	+		
$x - 1$	-		-	-	0		
$2e^{-x}$	+		+	+	+		
x^2	+		+	0	+		
$f'(x)$	+	0	-	ej def.	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow	ej def.	\searrow	lok. min.	\nearrow

De relevanta gränsvärdena är alla tämligen uppenbara om man tittar på vad faktorerna $\frac{1}{x} - 2$ och e^{-x} går mot: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ då $x \rightarrow 0^\pm$, $f(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$, samt $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$.

Det är också enkelt att se var $f(x) = (1 - 2x)e^{-x}/x$ är positivt ($0 < x < \frac{1}{2}$) resp. negativt ($x < 0$ eller $x > \frac{1}{2}$), samt att $f(\frac{1}{2}) = 0$ är det enda nollstället.



Svar: Lokalt maximum $f(-1/2) = -4\sqrt{e}$, lokalt minimum $f(1) = -1/e$.
Linjen $y = 0$ är vågrät asymptot då $x \rightarrow \infty$, och linjen $x = 0$ är lodrät asymptot.

2. (a) Det finns många sätt! T.ex. ger identiteten $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ att $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2x \, dx = \int_0^{\pi/2} 2 \sin x \cos^2 x \, dx = [-\frac{2}{3} \cos^3 x]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$.
- (b) Integranden $f(x) = x^7 e^{x^4}$ är en udda funktion, dvs. $f(-x) = -f(x)$, och integrationsintervallet är symmetriskt kring origo, så integralen är lika med noll!
(Man kan även lösa uppgiften genom att räkna ut den primitiva funktionen – sätt $t = x^4$ – men det är onödigt arbete.)
- (c) $\int \arcsin 2x \, dx = [t = 2x] = \int \frac{1}{2} \arcsin t \, dt = \frac{1}{2}(t \arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt) = \frac{1}{2}(t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C = x \arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$.

Svar: Se ovan.

3. Om de två sidorna med budgetgirlanden har längd $x > 0$ så måste de två sidorna med lyxgirlanden ha längd $1/x$ för att arean ska bli 1. Totala girlangvikten (i gram) blir då

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot 2 = 2x + \frac{4}{x}, \quad x > 0.$$

Ur derivatan

$$f'(x) = 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x^2}$$

fås en väldigt enkel teckentabell:

x	0	$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	ej def.	-	0 +
$f(x)$	ej def.	\searrow	glob. min. \nearrow

Detta visar att $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ är f 's minsta värde (för $x > 0$).

Svar: Minsta möjliga girlangvikt är $4\sqrt{2}$ gram.

4. (a) Se läroboken.
- (b) Funktionen f är uppenbart kontinuerlig på intervallen $x > 0$ och $x < 0$ (elementära funktioner), så bara punkten $x = 0$ behöver undersökas. Först har vi $f(x) = \arctan(x2^{1/x}) \rightarrow \pi/2$ då $x \rightarrow 0^+$, eftersom $x2^{1/x} = [t = \frac{1}{x} \rightarrow \infty] = \frac{2^t}{t} \rightarrow \infty$ (standardgränsvärde). Alltså måste vi ha $f(0) = B = \pi/2$ om f ska kunna vara kontinuerlig. Om $A = 0$ så blir $f(x) = 0$ för alla $x < 0$, och då blir f diskontinuerlig, så vi kan anta $A \neq 0$ och göra uträkningen

$$f(x) = \frac{x \sin Ax}{e^{x^2} - 1} = A \cdot \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{\sin Ax}{Ax} \rightarrow A \cdot 1 \cdot 1, \quad \text{då } x \rightarrow 0^-,$$

vilket måste överensstämma med det tidigare bestämda värdet $f(0) = \pi/2$ för att f ska vara kontinuerlig.

Svar: $A = B = \pi/2$.

5. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned}\int \frac{8 dx}{x^3 - x^2 + 3x + 5} &= \int \frac{8 dx}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} \\ &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+3}{x^2 - 2x + 5} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \int \frac{(x-1)-2}{(x-1)^2 + 4} dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|(x-1)^2 + 4| + \arctan \frac{x-1}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2 + 4} + \arctan \frac{x-1}{2} + C,\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{8 dx}{x^3 - x^2 + 3x + 5} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2 + 4} + \arctan \frac{x-1}{2} \right]_1^\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{2}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}}{1 - \frac{2}{\omega} + \frac{5}{\omega^2}} + \arctan \frac{\omega-1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{4} - \arctan 0 \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 0.\end{aligned}$$

Svar: $\pi/2$.

6. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Ifall vi tar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ så är

$$|(x^2 - 6x) - (-9)| = |(x-3)^2| = |x-3|^2 < \varepsilon$$

för $0 < |x-3| < \delta$, vilket visar att definitionen av $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x) = -9$ är uppfylld.

7. Antag att f och g är kontinuerliga nära a samt att f och fg är deriverbara i a . Under dessa förutsättningar ska vi visa påståendet " $f(a) \neq 0 \implies g'(a)$ existerar", vilket är logiskt ekvivalent med det önskade påståendet " $g'(a)$ existerar inte $\implies f(a) = 0$ ".

Antag alltså att $f(a) \neq 0$. Eftersom f är kontinuerlig nära a är då $f(x) \neq 0$ även i någon omgivning av a , så funktionen $h(x) = 1/f(x)$ är definierad där, och deriverbar i a enligt kedjeregeln (eller kvotregeln, om man föredrar det). Produktregeln ger då att $g = (fg) \cdot h$ är deriverbar i a , vilket skulle visas.