Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

# Tentamen i Envariabelanalys 1

**2016-08-23 kl. 8.00–13.00**

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg $n$ räcker $4(n-1)$ poäng och $n$ godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm värdemängden $V_f$ för funktionen $f(x) = \arctan x - \dfrac{x+3}{x^2+1}$ ($x \in \mathbf{R}$).

2. Beräkna följande integraler:

   (a) $\displaystyle\int \frac{(1+(\ln x)^2)^2}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{2-\sin^2 x}$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^3+x-1}{x^2+x}\,dx$

3. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+3x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin(1+h)-\sin 1}{h}$

4. Låt $f(x) = e^{-|x|}$ för $x \in \mathbf{R}$. Rita graferna $y = f(x)$ och $y = f'(x)$ (var noga med att definitionsmängden för $f'$ framgår). Beräkna också $\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$.

5. (a) Ange en funktion som har $\dfrac{e^{x^2}}{2x}$ som primitiv funktion.

   (b) Beräkna $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{3x}^{x^2} \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt$.

   (c) Om $f'(x) = |x|$ och $f(-1) = 3$, vad är $f(2)$?

6. Låt
$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1+x^2}{x} + \arctan\frac{1+2x^2}{x^3}$$
för $x \neq 0$. Visa att $f(x)$ är konstant på intervallet $x < 0$ och på intervallet $x > 0$. Ta reda på vilka dessa konstanta värden är, t.ex. genom att undersöka lämpliga gränsvärden, och rita sedan grafen $y = f(x)$.

7. I beviset för differentialkalkylens medelvärdessats används ofta **Rolles sats**, som säger att om $f$ är deriverbar på det öppna intervallet $]a,b[$ (där $a < b$) och kontinuerlig på det slutna intervallet $[a,b]$, och om $f(a) = f(b)$, så finns det minst ett tal $\xi \in \,]a,b[$ sådant att $f'(\xi) = 0$.

   Bevisa denna sats! (Medelvärdessatsen får förstås inte användas, men andra satser som kommer tidigare i kursen får utnyttjas utan bevis.)

# Lösningsskisser för TATA41 2016-08-23

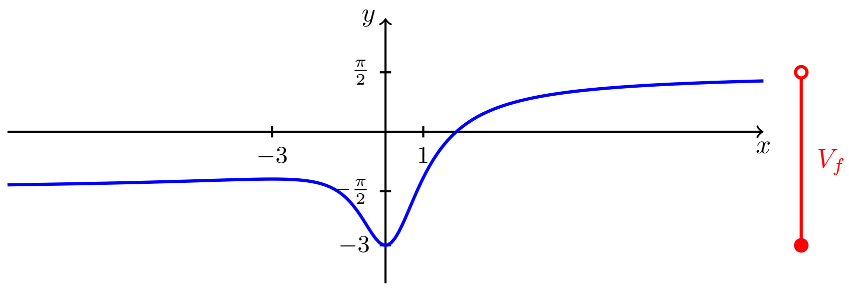
1. Derivatan av $f(x) = \arctan x - (x+3) \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$ är

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left(1 \cdot \frac{1}{x^2+1} + (x+3) \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{2x(x+3)}{(x^2+1)^2},$$

vilket ger en teckentabell med följande utseende:

| $x$ | | $-3$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(1+x^2)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ |

Vidare har vi att $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1+3/x}{1+1/x^2} \to \pm\frac{\pi}{2} + 0 \cdot 1 = \pm\frac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$. De lokala extremvärdena är $f(-3) = -\arctan 3$ (vilket är negativt, och lite större än $-\pi/2$) och $f(0) = -3$ (vilket är mindre än $-\pi/2$, och därmed *globalt* minimum). Vi kan nu rita grafen $y = f(x)$ och läsa av värdemängden $V_f$:




**Svar**: $V_f = [-3, \pi/2[$.

2. (a) Variabelbytet $t = \ln x$, $dt = dx/x$, ger $\int \frac{(1+(\ln x)^2)^2}{x}\,dx = \int (1+t^2)^2 dt = \int (1+2t^2+t^4)dt = t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \ln x + \frac{2}{3}(\ln x)^3 + \frac{1}{5}(\ln x)^5 + C$.

   (b) Trigonometriska ettan, och därefter variabelbytet $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$, ger $\int \frac{\sin x\,dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{-dt}{1+t^2} = -\arctan t + C = -\arctan\cos x + C$.

   (c) Standardmetoden för rationella funktioner (polynomdivision och partialbråksuppdelning) ger $\int \frac{x^4+x^3+x-1}{x^2+x}\,dx = \int \left(x^2 + \frac{x-1}{x^2+x}\right)dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\ln|x+1| - \ln|x| + C$.

   **Svar**: Se ovan.

3. (a) Med den nya variabeln $t = x - 2$ fås $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x^2-4} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln((t+2)-1)}{(t+2)^2-4} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t^2+4t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{t+4}\right) = 1 \cdot \frac{1}{0+4} = \frac{1}{4}$, enligt ett av standardgränsvärdena.

(b) Förlängning med konjugatuttrycket ger att $x - \sqrt{x^2+3x} = \frac{x^2-(x^2+3x)}{x+\sqrt{x^2+3x}} = [\text{för } x > 0] = \frac{-3}{1+\sqrt{1+3/x}} \to \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2}$ då $x \to \infty$.

(c) Om $f(x) = \sin x$ så är

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(1+h) - \sin 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = \cos 1.$$

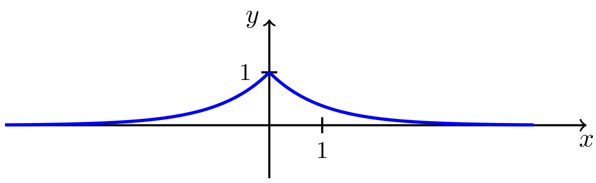
(Det går förstås även att räkna ut detta med hjälp av standardgränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, så som i *härledningen* av formeln $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.)

**Svar**: (a) $1/4$ (b) $-3/2$ (c) $\cos 1$

4. Funktionen

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$

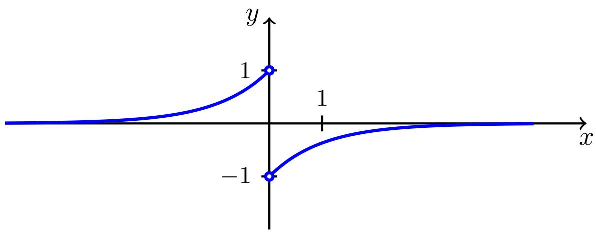
är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$, och grafen $y = f(x)$ kan omedelbart ritas eftersom man vet hur grafen $y = e^x$ och dess spegelbild $y = e^{-x}$ ser ut:




Derivering ger

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x > 0, \\ e^{x}, & x < 0. \end{cases}$$

Observera noga att derivatan $f'(x)$ *inte* är definierad i punkten $x = 0$; grafen för $f$ har ju ett tydligt "hörn" där! (Mer exakt: $f$:s höger- och vänsterderivata är inte lika i den punkten; $f'_+(0) = -1$ och $f'_-(0) = 1$.) Grafen $y = f'(x)$ har alltså följande utseende:




Slutligen får vi, eftersom $f$ är en jämn funktion,

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{5} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{5} e^{-x}\,dx = 2\big[-e^{-x}\big]_0^5 = 2(1 - e^{-5}).$$

**Svar**: Se ovan.

5. (a) Den enda funktionen som har $F(x) = e^{x^2}/2x$ som primitiv funktion är naturligtvis dess derivata $f(x) = F'(x) = e^{x^2}(1 - \frac{1}{2x^2})$.

(b) Analysens huvudsats ihop med kedjeregeln ger

$$\frac{d}{dx}\int_{3x}^{x^2} \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt = \frac{\sin x^2}{x^4+1}\cdot 2x - \frac{\sin 3x}{9x^2+1}\cdot 3.$$

(c) Enligt insättningsformeln är $\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx = \big[f(x)\big]_{-1}^{2} = f(2) - f(-1)$, eftersom $f'(x) = |x|$ är en kontinuerlig funktion. Alltså är $f(2) = f(-1) + \int_{-1}^{2} |x|\ dx = 3 + \int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = 3 - \big[\frac{1}{2}x^2\big]_{-1}^{0} + \big[\frac{1}{2}x^2\big]_{0}^{2} = 3 + \frac{1}{2} + 2 = 11/2$.

**Svar**: Se ovan.

6. Derivatan av

$$f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1+x^2}{x} + \arctan\frac{1+2x^2}{x^3} \qquad (\text{för } x \neq 0)$$

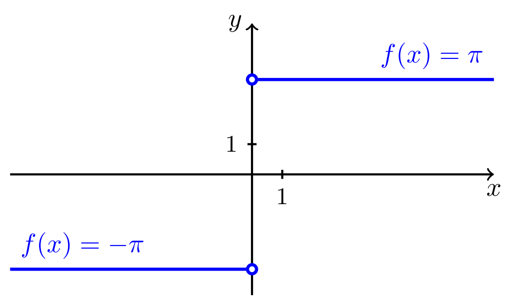
är

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^2}{x}\right) + \frac{1}{1+\left(\frac{1+2x^2}{x^3}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+2x^2}{x^3}\right)\\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+(1+x^2)^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}+1\right) + \frac{x^6}{x^6+(1+2x^2)^2}\cdot\left(\frac{-3}{x^4}+\frac{-2}{x^2}\right)\\
&= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1+x^2}{x^4+3x^2+1} + \frac{-3x^2-2x^4}{x^6+4x^4+4x^2+1}\\
&= \frac{(x^4+3x^2+1)+(1+x^2)(x^2-1)}{(1+x^2)(x^4+3x^2+1)} + \frac{-3x^2-2x^4}{x^6+4x^4+4x^2+1}\\
&= \frac{2x^4+3x^2}{x^6+4x^4+4x^2+1} + \frac{-3x^2-2x^4}{x^6+4x^4+4x^2+1} = 0 \qquad (\text{för } x \neq 0).
\end{aligned}$$

Eftersom $f'(x) = 0$ i intervallen $x < 0$ och $x > 0$, så måste $f(x)$ vara konstant i respektive intervall, vilket skulle visas. Från gränsvärdena

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\arctan x + \lim_{t\to\pm\infty}\arctan t + \lim_{s\to 0^\pm}\arctan s\\
&= \frac{\pm\pi}{2} + \frac{\pm\pi}{2} + 0 = \pm\pi
\end{aligned}$$

följer det att $f(x) = \pi$ för $x > 0$ och $f(x) = -\pi$ för $x < 0$, och grafen $y = f(x)$ ser då ut såhär, såklart:




7. Se läroboken (Forsling–Neymark), s. 203.