Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2016-06-07 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen för funktionen $f(x) = \dfrac{2x}{x-1} + \arctan 2x$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna följande integraler:

   (a) $\displaystyle\int_1^3 \ln 2x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^3 x \, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + x - 6}$

3. Beräkna $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3x+3}{x^3-1} \, dx$ (eller visa divergens).

4. Hur många lösningar $x \in \mathbf{R}$ har ekvationen $e^{-x}(x^2 + 5x + 1) = 5$?

5. (a) Undersök $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$.

   (b) Undersök $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$.

   (c) Ange den exakta matematiska definitionen, med ϵ och δ, av vad som menas med att $\lim_{x\to a} f(x) = L$, där a och L är reella tal (alltså inte $\pm\infty$). För att göra formuleringen lite enklare, låt oss förutsätta att f:s definitionsmängd består av alla reella tal utom möjligen a.

6. (a) Bevisa att om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a.

   (b) Kan det inträffa att $f'_+(a) = f'_-(a)$ (dvs. att höger- och vänsterderivatorna i a existerar och är lika) ifall f är diskontinuerlig i a?

   (c) Undersök $f'_+(0)$ och $f'_-(0)$ för funktionen $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$

7. Avgör om $\displaystyle\int_1^\infty \left(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\right) dx$ är konvergent eller divergent.

Lösningsskisser för TATA41 2016-06-07

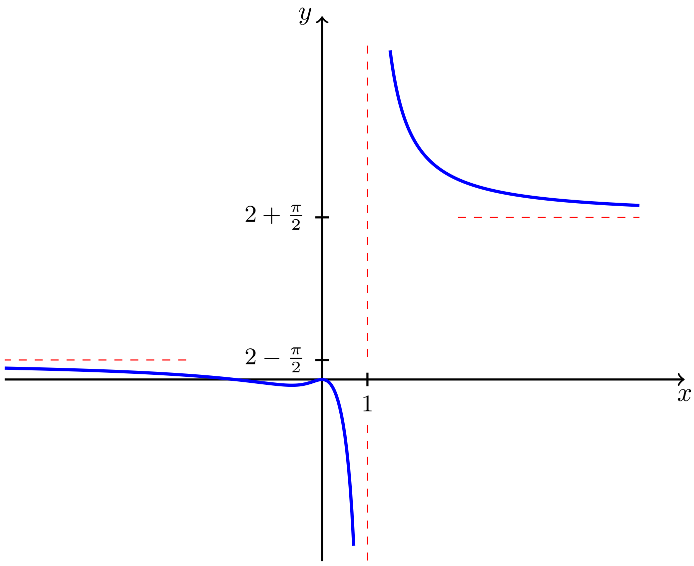
1. Funktionen $f(x) = \frac{2x}{x-1} + \arctan 2x = 2 + \frac{2}{x-1} + \arctan 2x$ är definierad för $x \neq 1$ och har derivatan

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{-2x\,(3x+2)}{(x-1)^2(1+4x^2)},$$

vilket ger följande teckentabell:

x		$-\frac{2}{3}$		0		1	
$-2x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$3x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-1)^2(1+4x^2)$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$

Gränsvärden: $f(x) \to 2 \pm \frac{\pi}{2}$ då $x \to \pm\infty$, samt $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to 1^{\pm}$.



Svar: Lokalt minimum $f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{5} - \arctan\frac{4}{3} < 0$, lokalt maximum $f(0) = 0$. Linjen $y = 2 + \frac{\pi}{2}$ är vågrät asymptot då $x \to \infty$, likaså $y = 2 - \frac{\pi}{2}$ då $x \to -\infty$, och linjen $x = 1$ är lodrät asymptot.

2. (a) $\int_1^3 \ln 2x\,dx = [x\ln 2x - x]_1^3 = (3\ln 6 - 3) - (\ln 2 - 1) = 3\ln 3 + 2\ln 2 - 2$.

   (b) Variabelbytet $t = \sin x$ ger $\int_0^{\pi/6} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \int_0^{1/2} (1 - t^2)\,dt = [t - \frac{1}{3}t^3]_0^{1/2} = \frac{11}{24}$.

   (c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\big[\ln|x-2| - \ln|x+3|\big]_{-1}^{1} = -\frac{1}{5}\ln 6$.

   Svar: Se ovan.

3. $\int_2^\infty \frac{3x+3}{x^3-1}\,dx = \int_2^\infty \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[2\ln|x-1| - \ln\left|x^2+x+1\right|\right]_2^\omega =$ $\lim_{\omega\to\infty} \ln\frac{(\omega-1)^2}{\omega^2+\omega+1} - (2\ln 1 - \ln 7) = \lim_{\omega\to\infty} \ln\frac{(1-\omega^{-1})^2}{1+\omega^{-1}+\omega^{-2}} + \ln 7 = \ln 1 + \ln 7 = \ln 7.$

Svar: $\ln 7$.

4. Sätt $f(x) = e^{-x}(x^2+5x+1)$ för $x \in \mathbf{R}$. Vi har

$$f(x) = \underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\substack{\to 0 \\ \text{(std.gr.v.)}}} \cdot \underbrace{(1 + \tfrac{5}{x} + \tfrac{1}{x^2})}_{\to 1} \to 0, \qquad \text{då } x \to \infty$$

och

$$f(x) = \underbrace{e^{-x}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{x^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(1 + \tfrac{5}{x} + \tfrac{1}{x^2})}_{\to 1} \to \infty, \qquad \text{då } x \to -\infty.$$

Vidare är $f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 3x + 4) = -e^{-x}(x+4)(x-1)$. Alltså:

x		-4		1	
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Funktionen har lokalt (t.o.m. globalt) minimum $f(-4) = -3\,e^4$ och lokalt maximum $f(1) = 7e^{-1} = 7/e$, vilket är mindre än t.ex. $7/2$, och alltså klart mindre än 5. Värdet $f(x) = 5$ antas alltså exakt en gång (för något $x < -4$).

Svar: Ekvationen har **en** reell lösning.

5. (a) $\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x} = e^{2x} \cdot \frac{e^x-1}{x} \to 1 \cdot 1 = 1$ då $x \to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

   (b) Bytet $x = t+1$, ihop med ett par standardgränsvärden, ger

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin(\pi+\pi t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{-\sin(\pi t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{\pi t}{\sin(\pi t)} \cdot \frac{-1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}.$$

   (c) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betyder att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $0 < |x-a| < \delta$ medför $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Svar: (a) 1 (b) $-1/\pi$ (c) Se ovan.

6. (a) Om f är deriverbar i a så gäller $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \to f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$ då $x \to a$, dvs. f är kontinuerlig i a.

   (b) Nej, det är omöjligt, för om höger- och vänsterderivatorna existerar och är lika så är ju f deriverbar i a, och alltså kontinuerlig där (enligt (a)-uppgiften).

   (c) För $h > 0$ är $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h$, vilket går mot 0 då $h \to 0^+$, så $f'_+(0) = 0$. Men för $h < 0$ är $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(-1)-0}{h} = \frac{-1}{h}$, vilket går mot ∞ då $h \to 0^-$, så $f'_-(0)$ existerar inte.

   (Observera att svaret ”$f'_-(0) = 0$” är uppenbart fel, eftersom det motsäger utsagan i (b)-uppgiften; f är ju diskontinuerlig i origo.)

7. Skriv om integralen och använd medelvärdessatsen:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\omega} \left(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\right) dx &= \int_1^{\omega} e^{1/x} dx - \int_1^{\omega} e^{1/(x+1)} dx \\
&= \int_1^{\omega} e^{1/x} dx - \int_2^{\omega+1} e^{1/x} dx \\
&= \left(\int_1^{2} e^{1/x} dx + \int_2^{\omega} e^{1/x} dx\right) \\
&\quad - \left(\int_2^{\omega} e^{1/x} dx + \int_{\omega}^{\omega+1} e^{1/x} dx\right) \\
&= \int_1^{2} e^{1/x} dx - \int_{\omega}^{\omega+1} e^{1/x} dx \\
&= \int_1^{2} e^{1/x} dx - e^{1/\xi} \cdot \big((\omega+1) - \omega\big) \\
&= \int_1^{2} e^{1/x} dx - e^{1/\xi},
\end{aligned}$$

där ξ ligger i intervallet $[\omega, \omega+1]$. Detta medför att $e^{1/\xi} \to e^0 = 1$ då $\omega \to \infty$. Alltså är integralen konvergent, med värdet

$$\int_1^{\infty} \left(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\right) dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \left(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\right) dx = \int_1^{2} e^{1/x} dx - 1.$$

Svar: Konvergent.