Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2016-03-30 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen för funktionen $f(x) = 4 + 3x - 2\ln(1 + 3x^2)$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna följande obestämda integraler:
   (a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 + x - 2}$ (b) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \pi}}$.

3. Undersök följande gränsvärden:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1 + 3x)^{\frac{1}{5x}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{e^{\sin(2x+2)} - 1}{x + 1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln(2x + e^{3x})}{3x + \ln x}$.

4. Beräkna de generaliserade integralerna $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)}$ samt $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ eller visa divergens.

5. Ange, för samtliga reella k, hur många lösningar ekvationen $(x + 2)e^{2-|x|} = k$ har.

6. (a) Antag att f är en kontinuerlig funktion på $[-1, 1]$. Vad säger integralkalkylens medelvärdessats om $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$?
   (b) Ge ett exempel på en funktion f som är definierad på $[-1, 1]$ men inte uppfyller slutsatsen i integralkalkylens medelvärdessats. Motivera tydligt!
   (c) Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+2} x \sin\frac{1}{x}\,dx$.

7. Antag att f är en funktion definierad på intervallet $I = [4/5, 6/5]$ och att olikheterna $-\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \ln x - 1$ gäller för alla $x \in I$. Visa att f är deriverbar i 1 och finn $f'(1)$.

Lösningsskisser för TATA41 2016-03-30

1. Funktionen $f(x) = 4 + 3x - 2\ln(1 + 3x^2)$ är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$ och har derivatan

$$f'(x) = 3 - \frac{2 \cdot 6x}{1 + 3x^2} = \frac{9x^2 - 12x + 3}{1 + 3x^2} = \frac{9(x-1)(x-\frac{1}{3})}{1 + 3x^2},$$

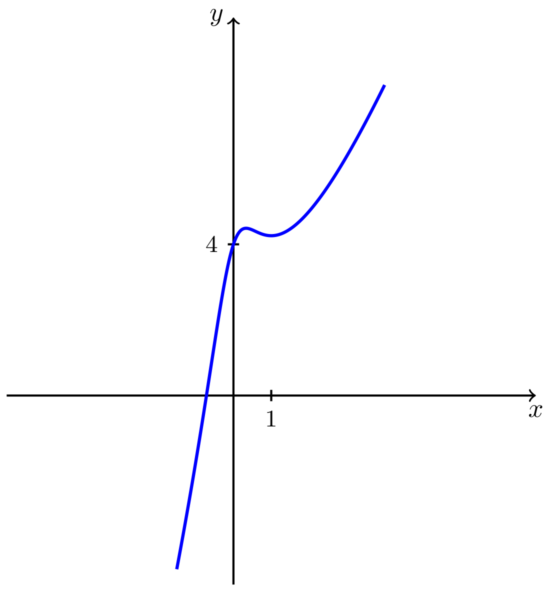
vilket ger följande teckentabell:

x		$\frac{1}{3}$		1	
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
$x - \frac{1}{3}$	$-$	0	$+$		$+$
$9/(1+3x^2)$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ (uppenbart), samt

$$f(x) = x \cdot \left(\tfrac{4}{x} + 3 - \tfrac{2}{x}\ln\bigl(x^2(\tfrac{1}{x^2} + 3)\bigr)\right)$$
$$= \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{4}{x} + 3 - 4\,\tfrac{\ln x}{x} - \tfrac{2}{x}\ln(\tfrac{1}{x^2} + 3)\right)}_{\to 0+3-4\cdot 0-0\cdot\ln(0+3)=3} \to \infty \quad \text{då } x \to \infty,$$

enligt standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.



Svar: Lokalt maximum $f(\frac{1}{3}) = 5 - 2\ln(4/3)$, lokalt minimum $f(1) = 7 - 4\ln 2$. Asymptoter saknas.

2. (a) $\int \frac{x\,dx}{x^2+x-2} = \int \big(\frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2} \big)\, dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{2}{3} \ln|x+2| + C.$

   (b) Bytet $t = \sqrt{x}$ ger $x = t^2$ och $dx = 2t\,dt$, och alltså $\int \cos\sqrt{x}\,dx = \int 2t \cos t\,dt = 2t \sin t + 2\cos t + C = 2\big(\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\big) + C.$

   (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\pi}} = \ln(x + \sqrt{x^2+\pi}) + C$ (standardprimitiv!).

   Svar: Se ovan.

3. (a) $(1+3x)^{1/5x} = \exp\big(\frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot \frac{3}{5}\big) \to \exp(1 \cdot \frac{3}{5})$ då $x \to 0$, enligt ett standardgränsvärde.

   (b) Bytet $t = x+1$, ihop med ett par standardgränsvärden, ger

$$\lim_{x\to -1} \frac{e^{\sin(2x+2)} - 1}{x+1} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin 2t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin 2t} - 1}{\sin 2t} \cdot \frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2,$$

   (c) Omskrivningen $\ln(2x + e^{3x}) = \ln(e^{3x} \cdot (1 + 2x/e^{3x})) = 3x + \ln(1 + 2x/e^{3x})$ ger

$$\frac{x + \ln(2x + e^{3x})}{3x + \ln x} = \frac{4 + \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{2x}{e^{3x}})}{3 + \frac{\ln x}{x}} \to \frac{4 + 0 \cdot \ln(1+0)}{3+0} = \frac{4}{3}$$

   då $x \to \infty$, enligt standardgränsvärden.

   Svar: (a) $e^{3/5}$ (b) 2 (c) 4/3

4. Variabelbytet $t = \ln x$, med $dt = dx/x$, ger integralerna

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^{1/2} x} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^{1/2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[2t^{1/2}\Big]_\varepsilon^{\ln 2} = 2\sqrt{\ln 2},$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[\ln t\Big]_\varepsilon^{\ln 2} = \infty,$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[-\frac{1}{t}\Big]_\varepsilon^{\ln 2} = \infty.$$

   Svar: Den första är konvergent med värdet $2\sqrt{\ln 2}$, de andra två är divergenta.

5. Sätt

$$f(x) = (x+2)\,e^{2-|x|} = \begin{cases} (x+2)\,e^{2-x}, & x \geq 0, \\ (x+2)\,e^{2+x}, & x \leq 0. \end{cases}$$

   Sätt $g(x) = (x+2)\,e^{2-x}$ och $h(x) = (x+2)\,e^{2+x}$ (för $x \in \mathbf{R}$) och undersök dessa separat. Med produktregeln beräknar vi $g'(x) = -(x+1)\,e^{2-x}$ och $h'(x) = (x+3)\,e^{2+x}$ (för $x \in \mathbf{R}$), och därmed får vi direkt

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+1)\,e^{2-x}, & x > 0, \\ (x+3)\,e^{2+x}, & x < 0. \end{cases}$$

   (Observera de strikta olikheterna här!) För att säga något om $f'(0)$ måste vi göra en ytterligare undersökning:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'_+(0) = g'(0) = -e^2$$

och

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'_-(0) = h'(0) = 3e^2.$$

Eftersom $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ existerar inte $f'(0)$. Det är uppenbart att $f'(x) = g'(x) < 0$ för $x > 0$ och att $f'(x) = h'(x)$ har teckenväxlingen $-\,0\,+$ för $x < 0$ (byter tecken vid $x = -3$), så teckentabellen för $f'(x)$ får följande utseende:

x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	ej def.	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

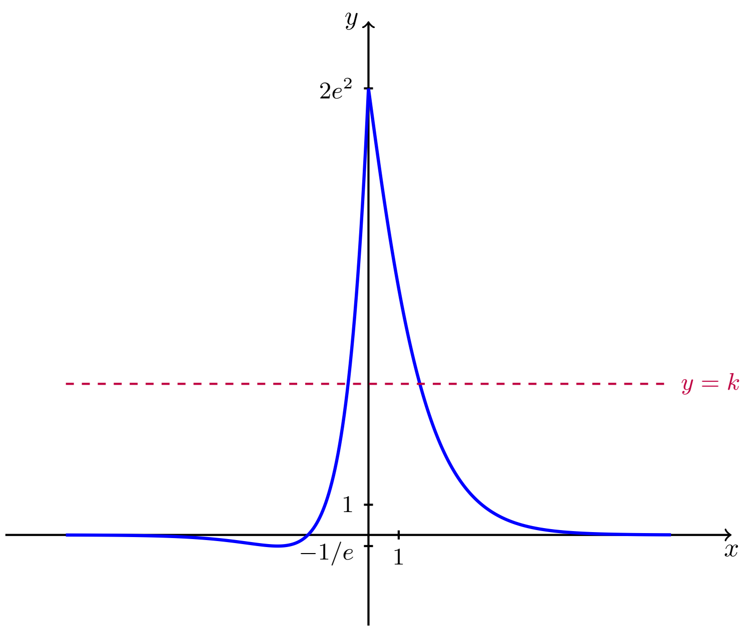
Vidare har vi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)\,e^2}{e^x} = 0$$

och

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)\,e^{2+x} = [\text{sätt } t = -x] = \lim_{t\to\infty} \frac{(-t+2)\,e^2}{e^t} = 0.$$

Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$ och läsa av antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$ för olika värden på k:



Svar: Inga lösningar om $k > 2e^2$ eller $k < -1/e$, en lösning om $k = 2e^2$ eller $k = -1/e$ eller $k = 0$, två lösningar i övriga fall.

6. (a) Integralkalkylens medelvärdessats säger att det finns (minst) ett tal $\xi \in [-1, 1]$ sådant att

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

(Tvåan är längden av integrationsintervallet $[a, b] = [-1, 1]$, alltså $b - a = 1 - (-1) = 2$.)

(b) Om funktionen f ska kunna bryta mot satsens slutsats måste den bryta mot satsens förutsättningar, och kan alltså inte vara kontinuerlig. T.ex. kan vi ta en trappfunktion: $f(x) = 17$ för $-1 \leq x < 0$ och $f(x) = 43$ för $0 \leq x \leq 1$. Då är $\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{1}{2}(17 + 43) = 30$, och detta värde har ju inte f någonstans.

(För ett ännu värre exempel kan man ta en icke-integrerbar funktion, t.ex. $f(x) = 1$ om $x \in \mathbf{Q}$ och $f(x) = 0$ annars. Då är satsens utsaga inte ens meningsfull.)

(c) Låt $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (för $x \neq 0$). Då är

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = [\text{sätt } t = 1/x] = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[n, n+2]$ om $n > 0$, och därmed finns det enligt medelvärdessatsen något $\xi \in [n, n+2]$ sådant att $g(n) = \int_n^{n+2} f(x)\, dx = \big((n+2) - n\big)\, f(\xi) = 2\, f(\xi)$. Eftersom $\xi \to \infty$ när $n \to \infty$ får vi

$$\lim_{n \to \infty} g(n) = 2 \lim_{\xi \to \infty} f(\xi) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Svar: Gränsvärdet är 2.

För ett givet n kan det finnas flera tal ξ sådana att $g(n) = 2f(\xi)$, så vi har inte definierat ξ entydigt som funktion av n. För den som eventuellt undrar vad som då egentligen menas med "$\xi \to \infty$ när $n \to \infty$" kommer här en precisare version av ovanstående resonemang:

Ta ett godtyckligt tal $\varepsilon > 0$. Förutsättningen $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ innebär (enligt definitionen av gränsvärde) att det finns ett tal ω sådant att $f(x)$ ligger högst $\varepsilon/2$ ifrån 1 för alla $x > \omega$. För varje $n > \omega$ gäller då följande: om $\xi \in [n, n+2])$ är något tal som fås från medelvärdessatsen enligt ovan så är $\xi > \omega$, vilket medför att $g(n) = 2f(\xi)$ ligger högst $2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$ ifrån 2. Och existensen av ett sådant ω (för varje $\varepsilon > 0$) är precis vad som krävs för att definitionen av $\lim_{n \to \infty} g(n) = 2$ ska vara uppfylld.

7. Insättning av $x = 1$ i den givna olikheten $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \ln x - 1$ visar att $f(1) = -1$. Om vi subtraherar detta värde från alla led erhålls

$$-\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) - f(1) \leq \ln x.$$

Sätt nu $x = 1 + h$, där vi först antar att $h > 0$, och dividera alla led med h:

$$\frac{-\frac{1}{1+h} + 1}{h} \leq \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \leq \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

När $h \to 0^+$ så går högerledet mot 1 (standardgränsvärde), och likaså för vänsterledet:

$$\frac{-\frac{1}{1+h} + 1}{h} = \frac{\frac{h}{1+h}}{h} = \frac{1}{1+h} \to 1.$$

Enligt instängningsregeln är alltså

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1.$$

Om vi istället antar att $h < 0$ så vänds olikheterna vid divisionen:

$$\frac{-\frac{1}{1+h} + 1}{h} \geq \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \geq \frac{\ln(1+h)}{h}.$$

Samma argument fungerar dock även här: när $h \to 0^-$ går ytterleden mot 1, så instängningsregeln ger

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1.$$

Detta visar att derivatan $f'(1)$ existerar och har värdet 1.

Svar: $f'(1) = 1$.

(Ovanstående resonemang kan enkelt modifieras till ett bevis för en allmän instängningssats för derivator: Om $g(a) = h(a)$, $g'(a) = h'(a) = A$ och $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ i en omgivning av a, så är f deriverbar i a med $f'(a) = A$.)