Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2016-03-17 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter $(n = 3, 4, 5)$. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen för $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. (a) Härled derivatan av $f(x) = x^3$ direkt utifrån derivatans definition.
   (b) Ge exempel på en funktion som har positiv derivata i hela sin definitionsmängd men ändå inte är växande. (Funktionen måste inte anges med en formel, utan det räcker att förklara hur grafen kan se ut med hjälp av en figur.)
   (c) Definiera vad som menas med att g är en primitiv funktion till f på intervallet I.

3. Beräkna följande integraler:

$$\text{(a)} \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x \, dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 9} \qquad \text{(c)} \quad \int_{-2}^{2} x^3 \, e^{-x^2} \, dx$$

4. Beräkna $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3 + x}$ (eller visa divergens).

5. Undersök följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\infty} \big(x - \sqrt{x^2 + 4x}\big) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x - 1} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{x\to\infty} e^x \big(\ln(2+e^x) - x\big)$$

6. Antag att man vill göra en uppskattning

$$C \leq \int_0^1 x^2 \, dx$$

   med hjälp av en undertrappfunktion. Vilket är det bästa (d.v.s. största) värdet på konstanten C som kan erhållas om man delar in intervallet $[0, 1]$ i bara två delintervall?

7. Beräkna $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{k + \cos x}$, där $k > 1$.

Lösningsskisser för TATA41 2016-03-17

1. Funktionen $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = x + x^{-2} - x^{-1}$ har derivatan

$$f'(x) = 1 + (-2)x^{-3} - (-1)x^{-2} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = \frac{(x-1)\big((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}\big)}{x^3},$$

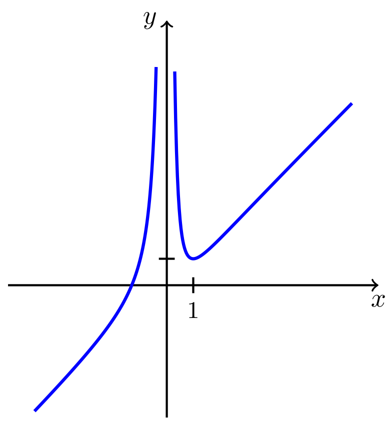
vilket ger nedanstående teckentabell:

x		0		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$	$+$		$+$		$+$
x^3	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ (uppenbart), och

$$f(x) = \underbrace{(1 - x + x^3)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to\infty} \to \infty \qquad \text{då } x \to 0.$$

(Obs. att både höger- och vänstergränsvärdet blir ∞, eftersom vi har x i kvadrat.) Linjen $x = 0$ är därmed en lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas. (Överkurs: Linjen $y = x$ är dock en sned asymptot, eftersom $f(x) - x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \to 0$ då $x \to \pm\infty$.)



Svar: Lodrät asymptot $x = 0$, lokalt minimum $f(1) = 1$.

2. (a) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2 + 0 + 0$ då $h \to 0$, alltså är $f'(x) = 3x^2$.

   (b) T.ex. $f(x) = -1/x$ med $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Derivatan $f'(x) = 1/x^2$ är positiv för alla $x \neq 0$, men f är inte växande, eftersom t.ex. $f(-1) > f(1)$.

   (c) Det betyder ju helt enkelt att $g' = f$ på I.

3. (a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = [x + \frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.
(I första steget utnyttjades att $\cos^2 x$ är en jämn funktion.)

   (b) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-9} = \int_0^2 \frac{1}{6}(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3})\,dx = \left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\right]_0^2 = \frac{1}{6}\ln\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\ln 1 = -\frac{1}{6}\ln 5$.

   (c) $\int_{-2}^{2} x^3\,e^{-x^2}\,dx = 0$, eftersom integranden är en udda funktion och integrationsintervallet är symmetriskt kring origo. (Det går förstås att räkna sig fram till detta också; sätt $t = x^2$ för att hitta primitiv funktion.)

   Svar: (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{6}\ln 5$ (c) 0

4. Vi bestämmer först primitiv funktion: $\int \frac{dx}{x^3+x} = \int(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. Detta ger (för $\omega > 1$) att $\int_1^\omega \frac{dx}{x^3+x} = \ln\omega - \frac{1}{2}\ln(\omega^2+1) - (\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{\omega^2}{\omega^2+1} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+\omega^{-2}} + \frac{1}{2}\ln 2 \to \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+0} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$ då $\omega \to \infty$.

   Svar: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+x} = \frac{1}{2}\ln 2$.

5. (a) $x - \sqrt{x^2+4x} = \frac{x^2-(x^2+4x)}{x+\sqrt{x^2+4x}} = [\text{om } x > 0] = \frac{-4}{1+\sqrt{1+4/x}} \to \frac{-4}{1+1} = -2$ då $x \to \infty$.

   (b) Med $t = e^x$ erhålls $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}+e^x-2}{e^x-1} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1}(t+2) = 1+2 = 3$.

   (c) Med $t = 2/e^x$ erhålls $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\big(\ln(2+e^x) - x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} e^x \ln\frac{2+e^x}{e^x} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{2}{t}\ln(t+1) = 2\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t} = 2\cdot 1 = 2$ (standardgränsvärde).

   Svar: (a) -2 (b) 3 (c) 2

6. Om indelningspunkten är $a \in [0,1]$ så kommer (den största möjliga) undertrappfunktionen till $f(x) = x^2$ att ha värdet noll på vänstra delintervallet och a^2 på det högra, så trappsumman blir $0\cdot(a-0) + a^2\cdot(1-a) = a^2 - a^3$. Detta uttryck har sitt största värde på intervallet $[0,1]$ i punkten $a = 2/3$, vilket man enkelt ser genom att göra en teckentabell för dess derivata $\frac{d}{da}(a^2 - a^3) = 2a - 3a^2 = 3a(\frac{2}{3} - a)$. Alltså är $C = (2/3)^2 - (2/3)^3$ den bästa möjliga konstanten.

   Svar: $C = 4/27$.

7. Substitutionen $t = \tan(x/2)$ (se ex. 5.35 och övn. 5.21 i Forsling–Neymark) ger, eftersom $t = 0$ då $x = 0$ och $t \to \infty$ då $x \to \pi^-$, att

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{1}{k+\cos x}\,dx &= \int_0^\infty \frac{1}{k+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^\infty \frac{2\,dt}{k(1+t^2)+1-t^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{2\,dt}{(k-1)t^2+(k+1)} = \frac{2}{k+1}\int_0^\infty \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,t\right)^2} \\
&= \frac{2}{k+1}\lim_{\omega\to\infty}\left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,t\right)\right]_0^\omega \\
&= \frac{2}{k+1}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

   Svar: $\pi/\sqrt{k^2-1}$.