Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2016-01-13 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen för funktionen $f(x) = \ln|1+2x| - 2\arctan x$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\tan 2x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(2x^2+2) - \frac{1}{3}\ln(3x^3+3)\right)$.

3. Beräkna följande bestämda respektive obestämda integraler:

   (a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+5x+4}dx$ (c) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$.

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+2x}dx$ eller visa att den är divergent.

5. (a) Definiera vad som menas med att en funktion är deriverbar i 0.

   (b) Bestäm konstanten a så att funktionen f blir kontinuerlig i 0, där f ges av

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{om } x \neq 0, \\ a & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

   (c) Låt f vara den kontinuerliga funktion som behandlades i (b)-uppgiften. Är f deriverbar i 0? Vad är i så fall $f'(0)$?

6. Finns det ett största värde som arean hos en rätvinklig triangel med omkretsen 2 längdenheter kan anta? Bestäm i så fall det värdet.

7. Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(2 - \sqrt[n]{2}\right)^n$.

Lösningsskisser för TATA41 2016-01-13

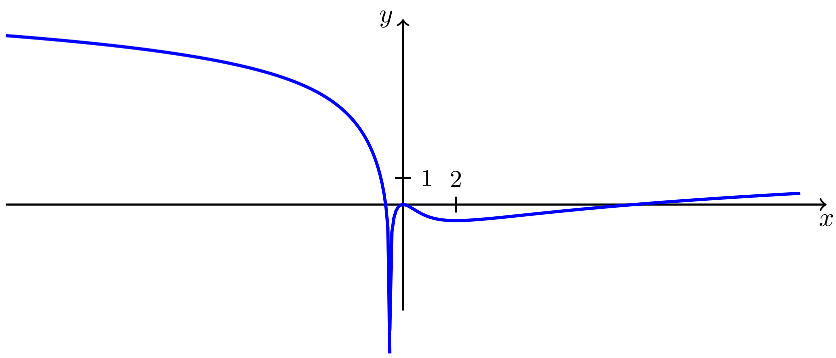
1. Funktionen $f(x) = \ln|1+2x| - 2\arctan x$ är definierad för $x \neq -\frac{1}{2}$. Derivatan är

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2x(x-2)}{(1+2x)(1+x^2)},$$

vilket ger nedanstående teckentabell:

x		$-\frac{1}{2}$		0		2	
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$1+2x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$1+x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Gränsvärden: $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\frac{1}{2}$, $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Linjen $x = -\frac{1}{2}$ är därmed en lodrät asymptot. Vågräta asymptoter saknas.



Svar: Lodrät asymptot $x = -\frac{1}{2}$, lokalt maximum $f(0) = 0$, lokalt minimum $f(2) = \ln 5 - 2\arctan 2$.

2. (a) $\frac{\ln(1-x)}{\tan 2x} = -\frac{1}{2}\frac{\ln(1-x)}{-x}\frac{2x}{\tan 2x} \to -\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (b) $\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4} = \frac{(x^2-x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-x-2}{x+2} \to \frac{0}{4} = 0$ då $x \to 2$.

   (c) $\frac{1}{2}\ln(2x^2+2) - \frac{1}{3}\ln(3x^3+3) = \frac{1}{2}\ln(x^2(2+2x^{-2})) - \frac{1}{3}\ln(x^3(3+3x^{-3})) = \frac{1}{2}\ln x^2 + \frac{1}{2}\ln(2+2x^{-2}) - \frac{1}{3}\ln x^3 - \frac{1}{3}\ln(3+3x^{-3}) = \frac{1}{2}\ln(2+2x^{-2}) - \frac{1}{3}\ln(3+3x^{-3}) \to \frac{1}{2}\ln(2+0) - \frac{1}{3}\ln(3+0)$ då $x \to \infty$.

   Svar: (a) $-1/2$ (b) 0 (c) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 3$ $\quad (= -\frac{1}{6}\ln\frac{9}{8})$

3. (a) $\int_2^4 \frac{dx}{x+2\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t\,dt}{t^2+2t} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2\,dt}{t+2} = \left[2\ln|t+2|\right]_{\sqrt{2}}^2 = 2\ln 4 - 2\ln(2+\sqrt{2})$.

   (b) $\int \frac{x+2}{x^2+5x+4}\,dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+4}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x+4| + C$.

   (c) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

4. $\int_1^\omega \frac{x-1}{x^3+2x}\,dx = \int_1^\omega \frac{1}{2}\bigl(\frac{x+2}{x^2+2} - \frac{1}{x}\bigr)\,dx = \bigl[\frac{1}{4}\ln(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln x\bigr]_1^\omega = \frac{1}{4}\ln(1+2\omega^{-2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\omega}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} \to 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ då $\omega \to \infty$.

   Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\bigr) - \frac{1}{4}\ln 3$.

5. (a) f ska vara definierad i en omgivning till 0 och gränsvärdet $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ ska existera.

   (b) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{x}\frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to \frac{1}{2}$ då $x \to 0$, så vi måste sätta $f(0) = a = \frac{1}{2}$ för att f ska bli kontinuerlig.

   (c) $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{h}\bigl(\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} - \frac{1}{2}\bigr) = \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \cdot \frac{-1}{2(\sqrt{1+h}+1)} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{1}{8}$ då $h \to 0$; här användes i sista steget att gränsvärdet från (b) dök upp en gång till. Alltså är f deriverbar i origo, med derivatan $f'(0) = -\frac{1}{8}$.

   Svar: (a) Se ovan. (b) $a = \frac{1}{2}$ (c) $f'(0) = -\frac{1}{8}$

6. Låt x och y vara kateternas längder i den rätvinkliga triangeln. Då är hypotenusans längd $\sqrt{x^2+y^2}$, och enligt förutsättning är omkretsen $x+y+\sqrt{x^2+y^2} = 2$. (Sidlängderna x och y måste då förstås ligga mellan 0 och 1.) Om man löser ut y ur detta samband erhålls $y = 2(1-x)/(2-x)$, så arean blir

$$A(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x(1-x)}{2-x}.$$

   Vi har att $A(x) \to 0$ då $x \to 0^+$ och då $x \to 1^-$, och derivatan

$$A'(x) = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})}{(x-2)^2}$$

   har ett enda nollställe $x = 2-\sqrt{2}$ i intervallet $0 < x < 1$; vi kan notera att för detta värde på x är också $y = 2-\sqrt{2}$. Alltså måste

$$A(2-\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2}(2-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2} > 0$$

   vara A:s största värde i detta intervall. (Om man gör en teckentabell som vanligt ser man att A' har teckenväxlingen $+\,0\,-$ i intervallet.)

   Svar: Areans största värde är $3-2\sqrt{2}$ (vilket inträffar när triangeln är en halv kvadrat).

7. Med $a_n = (2-2^{1/n})^n$ erhålls

$$\begin{aligned}\ln a_n &= n\ln(2-2^{1/n}) = n\ln(1+(1-2^{1/n})) \\ &= (-\ln 2)\cdot\frac{\ln(1+(1-2^{1/n}))}{1-2^{1/n}}\cdot\frac{e^{\frac{\ln 2}{n}}-1}{\frac{\ln 2}{n}} \\ &\to -\ln 2\cdot 1\cdot 1 = \ln\tfrac{1}{2} \quad \text{då } n\to\infty,\end{aligned}$$

   enligt standardgränsvärden, eftersom $1-2^{1/n} \to 0$ och $\frac{\ln 2}{n} \to 0$. Alltså $a_n \to \frac{1}{2}$ då $n \to \infty$.

   Svar: Gränsvärdet är $1/2$.