Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2015-08-25 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm för varje reellt k antalet lösningar till ekvationen $(x^2 + 6x + 9)e^{-x} = k$.

2. Undersök följande gränsvärden:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\cos(3x)}{\ln(1-3x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}\right)$.

3. (a) Antag att f är en funktion definierad i en omgivning till $c \in \mathbf{R}$. Definiera vad som menas med att f är kontinuerlig i c.
   (b) Låt funktionen g ges av
   $$g(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{om } x \geq 0, \\ 2x + 1 & \text{om } x < 0. \end{cases}$$
   Är g kontinuerlig i 0?
   (c) Låt g vara samma funktion som i (b). Är g deriverbar i 0?

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\,dx$ eller visa att den är divergent.

5. Rita grafen för funktionen $f(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x+1}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

6. För vilket/vilka reella a är $\displaystyle\int_a^{2a} e^{-x^2}\,dx$ som störst?

7. Låt f och g vara funktioner som är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på $]a, b[$. Antag att $f(a) = f(b) = 0$ och att $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ för alla $x \in]a, b[$. Visa att g har minst ett nollställe på $[a, b]$.

Lösningsskisser för TATA41 2015-08-25

1. Uttrycket i vänsterledet definierar en funktion

$$f(x) = (x^2+6x+9)e^{-x} = (x+3)^2 e^{-x}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

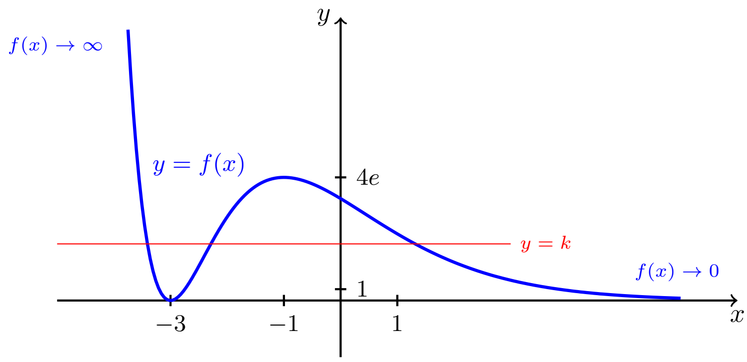
som är uppenbart ickenegativ, och har derivatan

$$f'(x) = 2(x+3)e^{-x} + (x+3)^2(-e^{-x}) = -e^{-x}(x+3)(x+1),$$

vilket ger nedanstående teckentabell:

x		-3		-1	
$-e^{-x}$	$-$		$-$		$-$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Minsta värdet är såklart $f(-3) = 0$, och $f(-1) = 4e$ är lokalt maximum. Vidare har vi $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$ (trivialt) och $f(x) = \frac{x^2}{e^x}(1+\frac{3}{x})^2 \to 0 \cdot 1^2 = 0$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärde). Med hjälp av detta kan vi enkelt rita grafen $y = f(x)$ och läsa av antalet reella lösningar till ekvationen $f(x) = k$ för olika värden på k:



Svar: Inga lösningar om $k < 0$, en lösning om $k = 0$ eller $k > 4e$, två lösningar om $k = 4e$, och tre lösningar om $0 < k < 4e$.

2. (a) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+2}{x+3} \to \frac{3}{4}$ då $x \to 1$.

   (b) $\frac{\sin(2x)\cos(3x)}{\ln(1-3x)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{-3x}{\ln(1+(-3x))} \cdot \cos(3x) \to -\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{3}$ då $x \to 0$, enligt standardgränsvärden.

   (c) $\sqrt{x}\big(\sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}\big) = \sqrt{x}\,\frac{(1+x)-(2+x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{2}{x}+1}} \to \frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$ då $x \to \infty$.

   Svar: (a) $3/4$ (b) $-2/3$ (c) $-1/2$.

3. (a) Se läroboken (Forsling & Neymark), definition 3.5.
   (b) Vänstergränsvärdet $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+1) = 1$ är inte lika med funktionsvärdet $g(0) = 0$, så g är *inte* kontinuerlig i 0. (En annan giltig motivering är att $\lim_{x\to 0} g(x)$ inte existerar, eftersom vänster- och högergränsvärdena är olika.)
   (c) Eftersom g inte ens är kontinuerlig i 0, så kan g inte vara deriverbar i 0 heller. (Deriverbarhet är ju en starkare egenskap än kontinuitet; se sats 4.1 i läroboken.)

   Svar: Nej på både (b) och (c).

4. Variabelbytet $t = e^x > 0$ ger

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx &= \int \frac{t+1}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{-t+1}{t^2+1}\right) dt \\
&= \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan t + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + \arctan(e^x) + C \\
&= \arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) + C,
\end{aligned}
$$

och därmed

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\left[\arctan(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x})\right]_0^R \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}
$$

Svar: Integralen är konvergent och har värdet $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

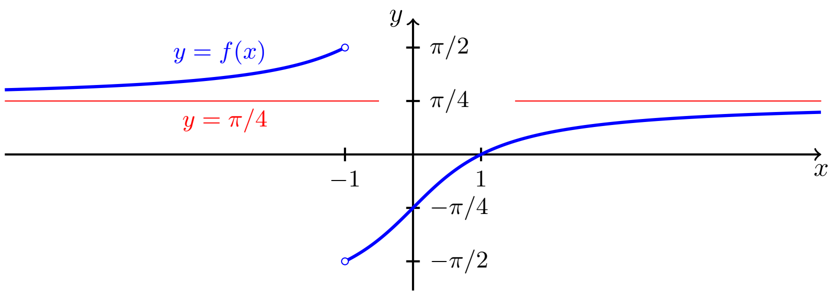
5. Funktionen $f(x) = \arctan \frac{x-1}{x+1}$ är definierad för $x \neq -1$, och har derivatan

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2}{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)} = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{för } x \neq -1).
\end{aligned}
$$

Eftersom $f'(x) > 0$ för $x \neq -1$ så är f strängt växande i intervallet $x < -1$ och i intervallet $x > -1$. Följande gränsvärden är av intresse:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \arctan \frac{x-1}{x+1} &= \lim_{x\to\pm\infty} \arctan \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \\
\lim_{x\to(-1)^-} \arctan \frac{x-1}{x+1} &= \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\to(-1)^+} \arctan \frac{x-1}{x+1} &= \lim_{t\to-\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Detta visar att linjen $y = \pi/4$ är vågrät asymptot till grafen $y = f(x)$ då $x \to \pm\infty$. Lodräta asymptoter saknas, och inte heller finns det några lokala extrempunkter. Vi får alltså följande graf, där vi även har markerat de uppenbara värdena $f(0) = -\pi/4$ och $f(1) = 0$:



Svar: Se ovan.

Anm.: Eftersom $f(x)$ har samma derivata som $\arctan x$ i intervallen $x < -1$ och $x > 1$ måste differensen $f(x) - \arctan x$ vara *konstant* på respektive intervall. Genom att sätta in punkter, eller med hjälp av gränsvärdena ovan, kan man enkelt bestämma storleken på denna differens, vilket visar att

$$
f(x) = \begin{cases} \arctan x + \frac{3\pi}{4}, & x < -1, \\ \arctan x - \frac{\pi}{4}, & x > -1. \end{cases}
$$

6. Sätt $f(a) = \int_a^{2a} e^{-x^2}\,dx$. Med analysens huvudsats (och kedjeregeln) erhålls

$$f'(a) = e^{-(2a)^2} \cdot 2 - e^{-a^2} = e^{-a^2}(2e^{-3a^2} - 1),$$

vilket är positivt omm $e^{-3a^2} > 1/2$, dvs. $e^{3a^2} < 2$, dvs. $|a| < A = \sqrt{(\ln 2)/3}$:

a		$-A$		A	
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Funktionen f har alltså ett strängt lokalt maximum i $x = A$, och värdet $f(A)$ är också ett strängt *globalt* maximum. Motivering: enligt teckentabellen är det bara bland värdena $f(a)$ för $a < -A$ som det möjligen skulle kunna finnas något större, men de värdena är ju negativa, medan $f(A)$ är positivt. (Det ser man på att integranden e^{-x^2} alltid är positiv, och $\int_A^{2A}$ går från ett mindre tal till ett större, medan $\int_a^{2a}$ går "baklänges" från ett större tal till ett mindre om $a < 0$.)

Svar: Integralen är som störst när $a = \sqrt{(\ln 2)/3}$.

7. Grundförutsättning i denna uppgift:

> Låt f och g vara kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på $]a, b[$, med $f(a) = f(b) = 0$.

Vi är ombedda att (under denna förutsättning) visa följande:

> Om $f'g - fg'$ saknar nollställen i intervallet $]a, b[$, så måste g ha minst ett nollställe i intervallet $[a, b]$.

Vi kan lika gärna bevisa följande istället (enligt den logiska principen att påståendet "**om P så Q**" är ekvivalent med sitt kontrapositiva påstående "**om icke-Q så icke-P**"):

> Om g saknar nollställen i intervallet $[a, b]$ så måste $f'g - fg'$ ha minst ett nollställe i intervallet $]a, b[$.

Antag alltså att g saknar nollställen i intervallet $[a, b]$. Då går det bra att dividera med $g(x)$ för $a \le x \le b$, så funktionen $h(x) = f(x)/g(x)$ blir kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$, med derivatan

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Enligt grundförutsättningen $f(a) = 0$ är $h(a) = f(a)/g(a) = 0/g(a) = 0$, och på samma sätt ser vi att $h(b) = 0$. Därmed uppfyller h förutsättningarna för Rolles sats, som säger att derivatan h' måste ha minst ett nollställe i intervallet $]a, b[$. Detta kan bara hända om täljaren $f'g - fg'$ har minst ett nollställe där, vilket var vad som skulle visas.