Lösningsskisser för TATA41 2015-06-08

1. Utan att räkna kan man konstatera att extremvärdena finns; detta garanteras av satsen om största och minsta värde, eftersom f är kontinuerlig och intervallet är slutet och begränsat. Eftersom f är deriverbar kan ett extremvärde bara antas i en av intervallets ändpunkter ($x = -1$ eller $x = 2$), eller i en stationär punkt ($x = 0$ eller $x = 1$, eftersom derivatan av $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ är $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$). Vi räknar alltså helt enkelt ut värdena i dessa punkter och kollar vilket som är störst och minst:

$$f(-1) = 7, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = -1, \quad f(2) = 16.$$

Svar: Största värdet är $f(2) = 16$ och minsta värdet är $f(1) = -1$.

(Funktionsundersökning med teckentabell osv. duger förstås också som motivering.)

2. (a) $\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x} = \frac{(1+2x)-(1-3x)}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x})} = \frac{5}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}} \to \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$ då $x \to 0$.

   (b) Sätt $x = 1+t$ så erhålls $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{\ln x} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2+2(1+t)-3}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{(4+t)t}{\ln(1+t)} = 4 \cdot 1 = 4$, enligt ett standardgränsvärde.

   (c) $\frac{4^{2x}+2^{4x}}{(3+5\cdot 4^x)^2} = \frac{16^x+16^x}{16^x(3\cdot 4^{-x}+5)^2} = \frac{2}{(3\cdot 4^{-x}+5)^2} \to \frac{2}{(0+5)^2} = \frac{2}{25}$ då $x \to \infty$.

   Svar: (a) 5/2 (b) 4 (c) 2/25.

3. (a) $\int \arctan 2x\, dx = \int 1 \cdot \arctan 2x\, dx = x \arctan 2x - \int x \frac{2}{1+(2x)^2}\, dx = x \arctan 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C$.

   (b) Variabelbytet $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$ ger $\int \frac{\cos x \sin x\, dx}{\cos^2 x + \cos x - 2} = \int \frac{-t\, dt}{t^2+t-2} = -\frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t+2}\right) dt = -\frac{1}{3}\big(\ln|t-1| + 2\ln|t+2|\big) + C = -\frac{1}{3}\big(\ln(1-\cos x) + 2\ln(2+\cos x)\big) + C$.

   (c) Variabelbytet $t = x+3$, $dt = dx$ ger $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-17}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-26}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-26}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2-26}\right| + C = \ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x-17}\right| + C$, enligt en standardprimitiv.

   Svar: Se ovan.

4. Sätt $f(x) = (2x^2 - 3x)\, e^{-x}$. Funktionen är definierad för alla $x \in \mathbf{R}$, men i denna uppgift är det bara $x \geq 0$ som är intressant. Vi gör en teckentabell för derivatan $f'(x) = (4x-3)\, e^{-x} + (2x^2-3x)\,(-e^{-x}) = -(2x^2-7x+3)\, e^{-x} = -2(x-3)(x-\frac{1}{2})\, e^{-x}$:

x		$1/2$		3	
$-2e^{-x}$	$-$		$-$		$-$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Vi har alltså $f(0) = 0$, lokalt minimum $f(1/2) = -e^{-1/2} = -1/\sqrt{e}$ och lokalt maximum $f(3) = 9e^{-3} = 9/e^3$. Dessutom har vi $f(x) = (2x^2-3x)/e^x \to 0$ då

$x \to \infty$ (standardgränsvärde, exponentialfunktionen växer mycket snabbare än polynom). Detta innebär att $f(x) \geq -1/\sqrt{e}$ för alla $x \geq 0$, men att olikheten inte gäller för alla $x \geq 0$ ifall man byter ut $-1/\sqrt{e}$ mot något större tal. (Däremot kan man förstås byta ut $-1/\sqrt{e}$ mot ett mindre tal utan att olikheten blir falsk.)

Svar: Olikheten är sann för alla $x \geq 0$ om och endast om $a \leq -1/\sqrt{e}$.

5. (a) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[x\ln x - x\right]_\varepsilon^1 = (1\cdot 0 - 1) - \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1-(0-0) = -1$, enligt standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^x\right]_\alpha^0 + \lim_{\omega\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\omega = (1-0)+(0-(-1)) = 2.$

   (c) För att integralen ska vara konvergent måste $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ och $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ vara konvergenta, men det är de inte; t.ex. har vi $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln\varepsilon \to \infty$ då $\varepsilon \to 0^+$.

   Svar: (a) -1 (b) 2 (c) divergent.

6. Se läroboken.

7. Ekvationen är ekvivalent med

$$f(x)+g(x) = a, \qquad \text{där } g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}.$$

Funktionen g är kontinuerlig och strängt växande på $]0,1[$ (vilket man t.ex. ser på att $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2} > 0$), och uppfyller $g(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$ samt $g(x) \to \infty$ då $x \to 1^-$. Detsamma gäller därmed även för funktionen $h = f+g$ (ty $f(x)$ ligger mellan de ändliga värdena $f(0)$ och $f(1)$, och ”växande funktion + strängt växande funktion = strängt växande funktion”).

Givet ett tal $a \in \mathbf{R}$ finns det då (direkt utifrån definitionen av oegentligt gränsvärde) något tal $\xi_1 \in\,]0,1[$ där $h(\xi_1) < a$ (eftersom $h(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$) och något annat tal $\xi_2 \in\,]0,1[$ där $h(\xi_2) > a$ (eftersom $h(x) \to \infty$ då $x \to 1^-$). Eftersom h är kontinuerlig finns det därmed, enligt satsen om mellanliggande värde, *minst* ett tal ξ mellan ξ_1 och ξ_2 där $h(\xi) = a$. Och eftersom h är strängt växande finns det *högst* ett sådant tal ξ. Därmed har vi visat att ekvationen $h(x) = a$, alltså $f(x)+g(x) = a$, har exakt en lösning i intervallet $]0,1[$.

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2015-06-08 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Bestäm största och minsta värdet av $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ på intervallet $[-1, 2]$.

2. Undersök följande gränsvärden:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{\ln x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4^{2x}+2^{4x}}{(3+5\cdot 4^x)^2}$

3. Beräkna följande primitiva funktioner:

   (a) $\displaystyle\int \arctan 2x\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2}\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-17}}$

4. För vilka $a \in \mathbf{R}$ är det sant att $(2x^2 - 3x)\, e^{-x} \geq a$ för alla $x \geq 0$?

5. Beräkna följande generaliserade integraler (eller visa divergens):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$

6. Formulera och bevisa följande räkneregler:

   (a) Produktregeln för derivata (direkt utifrån derivatans definition).
   (b) Kvotregeln för derivata.
   (c) Regeln för partiell integration i obestämda integraler.

   (I (b) och (c) får produktregeln och kedjeregeln förutsättas kända.)

7. Låt f vara en växande kontinuerlig funktion på intervallet $[0, 1]$. Visa att ekvationen

$$f(x) + \frac{1}{1-x} = a + \frac{1}{x}$$

   har exakt en lösning i intervallet $]0, 1[$ för varje $a \in \mathbf{R}$.