Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA41
Provkod: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 1

2015-04-08 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Varje uppgift kan ge högst 3 poäng. Uppgift räknas som godkänd om den bedömts med minst 2 poäng. För betyg n räcker $4(n-1)$ poäng och n godkända uppgifter ($n = 3, 4, 5$). Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Rita grafen för funktionen $f(x) = \dfrac{4x - x^2}{(x+2)^2}$. Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt lokala extrempunkter.

2. Beräkna följande primitiva funktioner:

$$\text{(a)} \quad \int \cos^3 x \, dx \qquad \text{(b)} \quad \int x^3 e^{x^2} \, dx \qquad \text{(c)} \quad \int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

3. (a) Undersök $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$.
   (b) Undersök $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\ln(1 - 3x)}$.
   (c) Visa direkt utgående ifrån derivatans definition att $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^3}$.

4. Hur många reella lösningar har ekvationen $(x+2)\, e^{1/x} = k$ för olika värden på den reella konstanten k?

5. Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{4 + x|x|}$.

6. Låt P vara en godtycklig punkt på den del av kurvan $y = e^{-x}$ som ligger i första kvadranten ($x \geq 0$ och $y \geq 0$), och låt L vara kurvans tangentlinje i denna punkt P. Linjen L, ihop med x-axeln och y-axeln, avgränsar en triangel. Vilka är de möjliga värden som denna triangels area kan anta?

7. Beräkna integralen om den är konvergent, eller visa att den är divergent:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin 2x} \right) dx.$$

Lösningsskisser för TATA41 2015-04-08

1. Till att börja med noterar vi att funktionen $f(x) = \frac{x(4-x)}{(x+2)^2}$ är definierad för alla $x \neq -2$ och har nollställena $x = 0$ och $x = 4$. Det är också uppenbart att $f(x) > 0$ om och endast om $0 < x < 4$. Derivering ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left((4x-x^2)\cdot\frac{1}{(x+2)^2}\right) \\ &= (4-2x)\cdot\frac{1}{(x+2)^2} + (4x-x^2)\cdot\frac{-2}{(x+2)^3} \\ &= \frac{(4-2x)(x+2)-2(4x-x^2)}{(x+2)^3} = \frac{8(1-x)}{(x+2)^3}, \end{aligned}$$

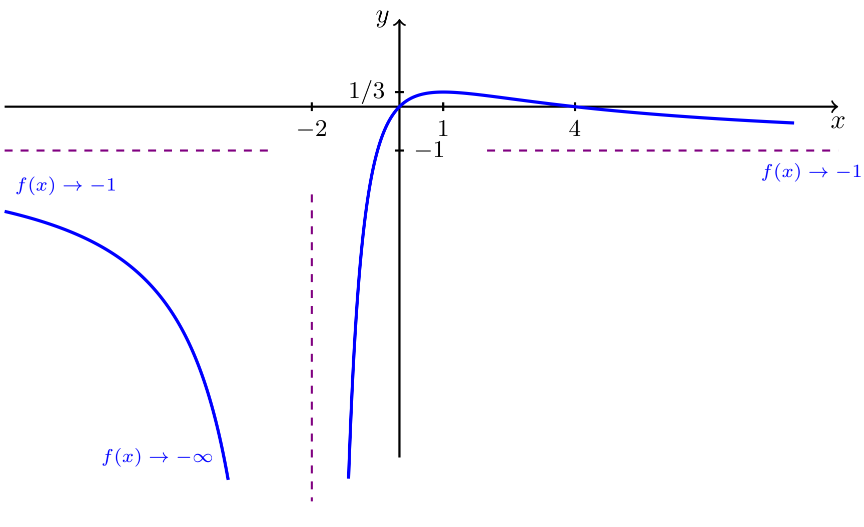
så att vi får följande teckentabell:

x		-2		1	
$8(1-x)$	$+$		$+$	0	$-$
$(x+2)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	ej def.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	ej def.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Det lokala maximivärdet är $f(1) = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$. Då $x \to -2$ har vi $4x - x^2 \to -12 < 0$ i täljaren och $(x+2)^2 \to 0^+$ i nämnaren, så $f(x) \to -\infty$. Detta visar att linjen $x = -2$ är en lodrät asymptot till grafen $y = f(x)$. Vidare har vi

$$f(x) = \frac{4x-x^2}{(x+2)^2} = \frac{\frac{4}{x}-1}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2} \to \frac{0-1}{(1+0)^2} = -1 \quad \text{då } x \to \pm\infty,$$

så linjen $y = -1$ är en vågrät asymptot. Nu kan vi rita grafen:



Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = -2$ är lodrät asymptot och linjen $y = -1$ är vågrät asymptot (både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$). $f(1) = 1/3$ är lokalt (och faktiskt globalt) maximum. Lokala minima saknas.

2. (a) Med produkt-till-summa-omskrivning får man $\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$. Men ett enklare sätt är $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$. (De två resultaten är såklart lika, vilket kan verifieras med produkt-till-summa-omskrivning; det är t.o.m. samma integrationskonstant C i båda fallen.)

(b) Med $t = x^2$ fås $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt = \frac{1}{2}(t-1)e^t + C = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C$.

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{2x\,dx}{2\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3\arcsin x + C.$

Svar: Se ovan.

3. (a) $\displaystyle\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3} \to \frac{-2-1}{-2-3} = \frac{3}{5}$ då $x \to -2$.

(b) $\displaystyle\frac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1-3x)} = -\frac{2}{3}\,\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\,\frac{\sin 2x}{2x}\,\frac{-3x}{\ln(1-3x)} \to -\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -\frac{2}{3}$ då $x \to 0$.

(c) Med $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (för $x \neq 0$) får vi, enligt derivatans definition, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{x^2(x+h)^2}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-(2x+h)}{x^2(x+h)^2} = \frac{-(2x+0)}{x^2(x+0)^2} = -\frac{2}{x^3}$.

Svar: (a) 3/5 (b) $-2/3$ (c) Se ovan.

4. Sätt $f(x) = (x+2)\,e^{1/x}$ (för $x \neq 0$). Vi gör en funktionsundersökning för att sedan kunna läsa av den sökta informationen i f:s graf. Det är uppenbart att $x = -2$ är funktionens enda nollställe, och att $f(x) < 0$ om $x < -2$ och $f(x) > 0$ om $-2 < x \neq 0$. Relevanta gränsvärden:

$$f(x) = \underbrace{(x+2)}_{\to 2}\underbrace{\exp(\underbrace{1/x}_{\to\infty})}_{\to\infty} \to \infty \quad \text{då } x \to 0^+,$$

$$f(x) = \underbrace{(x+2)}_{\to 2}\underbrace{\exp(\underbrace{1/x}_{\to-\infty})}_{\to 0} \to 0 \quad \text{då } x \to 0^-,$$

$$f(x) = \underbrace{(x+2)}_{\to\pm\infty}\underbrace{\exp(\underbrace{1/x}_{\to 0})}_{\to 1} \to \pm\infty \quad \text{då } x \to \pm\infty$$

(Överkurs, för nöjes skull: linjen $y = kx + m = x + 3$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$, eftersom $f(x)/x \to 1 = k$ och $f(x) - kx = f(x) - x = \frac{e^{1/x}-1}{1/x} + 2e^{1/x} \to 1 + 2\cdot 1 = m$.)

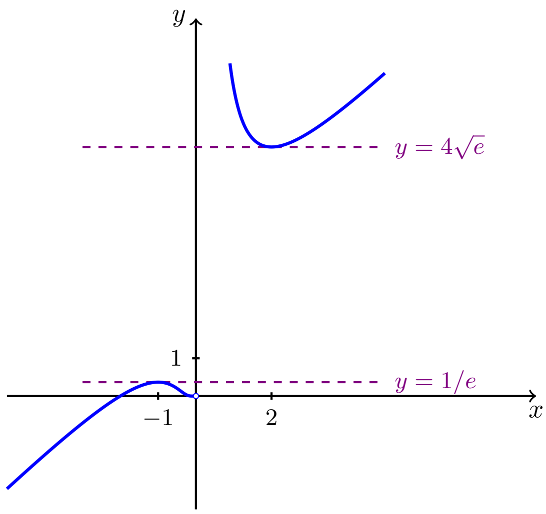
Derivatan är

$$f'(x) = 1\cdot e^{1/x} + (x+2)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)e^{1/x} = \frac{x^2-x-2}{x^2}\,e^{1/x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}\,e^{1/x},$$

vilket ger nedanstående teckentabell:

x		-1		0		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\exp(1/x)/x^2$	$+$		$+$	ej def.	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Det lokala maximivärdet $f(-1) = e^{-1} = 1/e < 1$ är klart mindre än det lokala minimivärdet $f(2) = 4e^{1/2} = 4\sqrt{e} > 4$. Nu kan vi rita grafen $y = f(x)$, och läsa av antalet lösningar till ekvationen $f(x) = k$, alltså hur många gånger linjen $y = k$ skär grafen:



Svar: Ekvationen har två lösningar om $k > 4\sqrt{e}$ eller $0 < k < 1/e$. Den har en lösning om $k = 4\sqrt{e}$ eller $k = 1/e$ eller $k \leq 0$. Lösning saknas om $1/e < k < 4\sqrt{e}$.

5. Dela upp integralen vid $x = 0$ för att kunna hantera absolutbeloppet:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{dx}{4+x|x|} &= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{4+x|x|} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{4+x|x|} \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{dx}{4-x^2} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{4+x^2} \\
&= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1/4}{2+x} + \frac{1/4}{2-x} \right) dx + \int_{0}^{2} \frac{dx/4}{1+(x/2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\Big[\ln|2+x| - \ln|2-x| \Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\Big[\arctan(x/2) \Big]_{0}^{2} \\
&= \frac{\ln 3}{4} + \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Svar: $(\ln 3)/4 + \pi/8$.

6. Låt P ha koordinaterna $(x, y) = (a, e^{-a})$, där $a \geq 0$. Ekvationen för tangentlinjen L till kurvan $y = f(x) = e^{-x}$ i denna punkt är

$$\begin{aligned} y &= f(a) + f'(a)\,(x-a) \\ &= e^{-a} + (-e^{-a})(x-a) \\ &= e^{-a}(1+a-x). \end{aligned}$$

Från detta ser vi att L skär koordinataxlarna i punkterna $(0, e^{-a}(1+a))$ och $(1+a, 0)$, vilket ger längderna på kateterna i den rätvinkliga triangeln som det frågas om. Denna triangels area är alltså

$$A(a) = \tfrac{1}{2} \cdot e^{-a}(1+a) \cdot (1+a) = \tfrac{1}{2} e^{-a}(1+a)^2,$$

och vi söker värdemängden för $A(a)$ då $a \geq 0$. Derivatan $A'(a) = \frac{1}{2} e^{-a}(1+a)(1-a)$ är positiv för $0 \leq a < 1$ och negativ för $a > 1$. Funktionen växer alltså från $A(0) = 1/2$ till det största värdet $A(1) = 2e^{-1} = 2/e$, och avtar därefter mot $\lim_{a\to\infty} A(a) = 0$ (standardgränsvärde). De möjliga värdena är alltså $0 < A(a) \leq 2/e$.

Svar: Arean kan anta alla värden i intervallet $]0, 2/e]$.

7. Med hjälp av

$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin x \cos x} = \int \frac{1}{2 \tan x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \ln |\tan x| + C$$

erhålls

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin 2x} \right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x}{x} \right| \right]_\varepsilon^1 = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan 1}{1} \right| + \frac{1}{2} \ln 1,$$

eftersom $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{\tan \varepsilon}{\varepsilon} = 1$ enligt ett standardgränsvärde.

Svar: Integralen är konvergent och har värdet $-\frac{1}{2} \ln(\tan 1)$.

Anmärkning: Som en rimlighetskontroll kan man gärna notera redan innan man börjar räkna att *om* integralen är konvergent så måste dess värde vara *negativt.* Detta beror på att $0 < \sin 2x < 2x$ för alla $x > 0$, så att integranden $\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin 2x}$ är negativ i integrationsintervallet. Och svaret vi fick fram är mycket riktigt negativt, för en radian är ungefär $57°$ (en aning mindre än $60° = \pi/3 \approx 1{,}05$), så $\tan 1 > \tan(\pi/4) = 1$, och därmed $\ln(\tan 1) > 0$.